P. M. Roget

C

4/-

not mentioned in [illegible] Catalogue

Presentation copy from author

HEMISPHAERIVM DISSECTVM

OPVS GEOMETRICVM

In quo obiter tractatur

De Maximis Inſcriptibilibus, & Minimis Circumſcribentibus

RATIO etiam diſcutitur quare aliquæ Propoſitiones non admittant Solutionem per Media Plana vel Euclidis Elementa.

Cum

METHODO nouâ Geometricâ quâ ad Aequationem reducitur Propoſitio de Sectione Hemiſphærij in ratione datâ

Acceſsit APPENDIX de Inſcriptione in Sphæra Coni Scaleni, & de Superficie eius.

Demum

Cubatio cuiuſdam partis Cylindri diſſectæ Plano.

Authore

RICARDO ALBIO ANGLO.

ROMAE, Ex Typographia Manelphi Manelphij, 1648.

SVPERIORVM PERMISSV.



SERENISSIMO PRINCIPI CAROLO CAROLI REGIS MAGNÆ BRITANNIÆ, &c. FILIO PRIMOGENITO, PRINCIPI WALLIÆ, DVCI CORNVBIÆ, ROTHSAIÆ, &c. DOMINO MEO CLEMENTISSIMO.



GEOMETRIÆ ſtudium periucundum cùm ſit ex ſe, PRINCEPS Sereniſſime, ac vtile omnibus, tum vero Principibus rerum Militarium tractationi deditis, apprimè eſt neceſſarium. Eapropter cùm opuſculum iſtud HEMISPHERIVM DISSECTVM elucubraſſem, non aliud Patrocinium ei quærendũ duxi, quàm V. Serenitatis, quæ à teneris annis educata in caſtris,

arma tractauit prius pœne quàm nosse posset, & præeundo suis exercitibus, Imperatoris munus adhuc Tiro gessit. Et quamuis (quæ temporum nostrorum est infælicitas) intestinis subditorum exacta dissidijs, Patriâ nunc pariter & Regnis exulet; tamen quod cælo ipso facem præferente auguror, futurum breui spero, vt bonis auibus redux, velut sidus, è nebulâ illucescat denuò Hemisphærio Britannico, & altissimâ pace compositis bellis, administret tandem iustitiam æqualitate (vt sic loquar) Geometricâ, hoc est, perfectâ per omnes tergemini sui Regni ditiones. Et verò, cùm me natura genuerit subditum V. Regiæ Celsitudini, nemini æquius erat dedicari à me labores meos, quàm ei, quem & Principem mihi præfecit Deus; quemque intuentur spes omnes nostræ, tanquam liberatorem afflictissimæ Patriæ, & fundatorem quietis tamdiu optatæ.

Accedit ad hos obseruantiæ meæ titulos, communes pluribus, peculiaris nexus beneficiorum & honorum, quibus Socerum meum RICHARDVM WESTONVM Port-

landiæ Comitem affecerũt, tàm Auus fœlicis mem. Iacobus Rex, quàm Serenissimus Pares V. Serenitatis. Ab illo quippe honorificentissimis Legationibus peregre est adhibitus, postea in sanctioris Consilij senatum adlectus, commissis ei maximi ponderis negotiis: ab hoc vero insuper honoribus eximiis est auctus, summus Angliæ Thesaurarius creatus, Inclito ordini equitum Periscelidis adscriptus; denique post obitum in consessu publico Optimi ac Prudentissimi Ministri elogio cohonestatus.

Patere igitur, Senenissime PRINCEPS, me tot nominibus obstrictum obsequiis V. Regiæ Celsitudinis, offerre eidem hoc leuidense munus meum, studiorum meorum partum, & exilij aliquod solatium. Dignare vmbrâ ac præsidio vestri Nominis opusculum hoc, licet ex veterum Archimedis Inuentorum fæcunditate progenitum, tamen nouum, cùm multa sint in eo à nemine quod sciam hactenus demonstrata. Plura fortasse & his maiora obsequia præstabunt Serenissimæ Celsitudini V. posteri mei, pro quorum fidelitate sicut hisce spondeo, ita

de indole bene spero, cùm fluat in venis illorum sanguis Optimi ac Sapientissimi sui Aui. Deus O. M. seruet diù precor Nobis incolumen V. R. Celsitudinem, ipsamque Regnis, & Regna ipsi restituat quamprimùm. Romæ 15. Iunij 1648.

Serenissimæ Regiæ Celsitudinis vestræ.

Subditus humillimus & deuotissimus

RICHARDVS ALBIVS.

AD LECTOREM.

AD LECTOREM.



NDE tibi tam impolitus liber, si quæris amice Lector, eum scito in grauescentis in authore, & per ætatem, & per infortunia animi Typum gerere: qui iam solidæ veritatis appetens lenocinia, blandioris adolescentiæ, & scholæ cultum negligit. Cur in hanc Palæstram serus prodiuerim sic accipe. Sextus post decimum huius sæculi, me, vrgebat annus, illud toto decennio anteuertentem, antequam quid scientia foret, gustare datum fuisset, seueritate legum patriarum, Catholicis, publicas scholas interdicente: Cum quid vltra furibundos Oceani, quibus cingit Britanniam, aggeres ageretur visendi libido me incessit, transitaque Gallia perduxit in Hetruscam Curiam, & pacis bellique vigentem artibus Florentinam Ciuitatem. Dux itineris comesque erat Iacobus Claytonus, & administrandæ itinerationis & scienciarum peritia nostratibus Europæ lustratoribus perquam notus, & ingenij facilitate, morumque suauitate, nulli, cui semel notus fuerat, obliuiscendus. Is me ad Aristotelicas institutiones, primo scientiæ

honore cæteris eo tempore prælatas, apprehendi. Organum ipsius peruolutaui, ad Physica Acroamata studium collocaui; directricem vitæ Scientiam ardenter persecutus sum. Quid multa? Conclusiones ambiguas, multis vltro citroque contentionibus differtas, inueni. Ipsas quin etiam Definitiones, & Principia, inter pugnantium interpretum explicationes & distinctiones, male sedentia & vacillantia, comperi. Mihi proinde puræ Tenebræ visæ sunt illæ disciplinæ. Magna interea fama inter doctos vehebatur Sublimis ille Galilei Galileus, calcatis infernè vndis, penetrato supernè cælo, egregijs in tellure machinis, fraternorum trium Regnorum Victor, tanta gloria, vt studiosi nullius oculos ad se non traheret, atque etiam meos. Verùm imparem tantæ luci, fouit tantisper Discipulus ipsius D. Benedictus a Castellis, sub Vrbano postmodum Ecclesiæ Principe, eiusdem Mathematicis præfectus disciplinis, & machinationibus. Sub quo Magistro, Euclidem aggressus, viam regiam institisse visus sum, firmitatis & euidentiæ plenam, in qua nullus trepidationi, vel ambiguitati, reliquus esset locus. Vt non mirarer magna illa ingenia, Bonauenturam Cauallerium Bononiensis

Mathiseos præfectum, & Andream Arrighettum præclarissimis in Hetrusca Curia muneribus præpositum, & iisdem tunc operis addictos, & eodem vsos esse magistro. Sed vix alterum annum tanta licuit fœlicitate potiri. Ad patrias curas & rem familiarem, & longa beatioris illius vitæ obliuia, me traxit necessitas; donec post plures annos, reuisens me ex longa peregrinatione Frater meus Thomas, iisdem disciplinis delectatus; ad Archimedis libros eos potissime quos de Sphæra & Cylindro scripsit, recolendos, impulit. Ast importunus rerum Britannicarum motus, qui me procul patria domo extorrem in Hetruriã & Romã vsque egerunt, propere has cogitationes rescinderunt. Sic tamen, vt easdem, Romæ rursus obuius idem Frater, denuò suscitaret, perficeretque, vt meditatas de Cylindro & Sphæra propositiones etsi per vicennalem propemodum desuetudinem, tardus, in lucem dare, susciperem. Neque Roma discedens destitit per amicos, eandem mihi necessitatem impingere, maximè per Clarissimum virum, eumque & in his disciplinis doctissimum, & eas colentium fidissimum patronum (quem honoris causa nomino) Michaelem Angelum Riccium; cuius ingenij monumen-

ta tam mirabitur posteritas, quam indolis delicias colit amicorum frequentia.

Sic habes benigne Lector opusculum hoc, cuius, ut situm & barbariem excusari precor, sic veram nouitatem & demonstrationum firmitatem, te delectaturam spero. Præter propositum enim est, si quid maioris momenti ab alio vulgatum huc intexuerim. Elementorum Euclidis quæ supposui loca, velut nota satis Lectoribus non signaui, Archimedeas & Apollonianas propositiones, plerumque vbi quærendæ sint adnotaui. Qualecunque est tandem opus, in sinum tuæ beneuolentiæ assume: Etsi breue, prolixis tamen & tenebricosis in Physicas scientias commentarijs non posthabendum, postquam hinc, modicum non magno tempore, illinc, veritatis parum post ingentem eis laborem, demessurus. Quorum tamen authores, etiam in has seuerissimas disciplinas, censuræ stylum stringere aliquando (nescio qua fiducia) non verentur; obliti sibi omnia in incerto esse, & modestiores certitudinem, plerumque, neque polliceri. Viuant in imperitia sua & ignorantiam maiore voluminum vastitate semper onerent. Mihi tecum libeat, frugi lector, breui compendio puris veritatibus oblectari. Vale.

DEFI-

Imprimatur, si videbitur Reuerendiss. P. Mag. Sac. Pal. Apost.

Alex. Victricius Episc. Alatr. Vicesg.

Ex commissione Reuerendissimi Patris Vincentij Candidi Magistri S. Palatij legi præsentem librum cui titulus Hemisphærium dissectum Authore Richardo Albio nobili Anglo, cuius singulare acumen & subtilitatem ingenij, summa cum demonstrandi perspicuitate sum admiratus.

Liber nihil continet contra fidem aut bonos mores, vtpote ab ipso scriptus qui præillustri & antiquissimâ familia apud Anglos natus, patrimonij & fortunarum iacturam atque exilium a patria ob fidei Catholicæ Professionem ea animi tranquillitate tulit vt nullæ nubes aduersitatis offuscauerint serenitatem illius mentis, quæ centrum ac omne bonum suum in cælo constituit & collocauit. Proinde Nobilissimi authoris dignissimum opus ne dum voluptate candidatorum omnium Mathematicæ, sed boni publici incremento typis dari posse censui. Romæ 16. Decemb. 1647.

P. Augustinus Conierius Monachus Benedictinus Anglus.

Imprimatur.

Fr. Hyacinthus Pandolphus Magister, & Socius Reuerendiss. P. Fr. Vincentij Candidi Ordinis Prædicatorum Sac. Pal. Apost. Mag.



DEFINITIONES.



ONORVM, Cylindrorum & Rhomborum, Definitiones, quoniam a multis traditæ, & satis cognitæ sunt omnibus, qui in Geometricis versantur; hic non traduntur.

Sectionum Conicarum Definitiones apud Apollonium in libris de Elementis Conicis quærantur.

Conoidum, & Sphæroidum apud Archimedem in libro de Conoidibus & Sphæroidibus.

Conus simpliciter, semper intelligitur de Cono recto, & basis cuiuscunque Coni est Circulus.

Conus Segmenti, est qui habet verticem in centro basis Hemisphærij, basim verò Circulum factum ex sectione plani, basi Hemisphærij, paralleli.

Conus sectoris, est idem cum Cono Segmenti; dicitur autem Sectoris in relatione ad Sectorem, cuius pars ille est.

Conus Portionis, est qui habet eandem basim cum Portione, & verticem in polo Hemisphærij.

Conus Rectangulus, est qui dum sectus fuerit Plano per axem (in triangulo per sectionem facto) habet angulum in vertice Rectum.

Segmentum, vocatur pars illa Hemisphærij, quæ interiacet duobus planis parallelis. Et si vnum planorum fuerit basis Hemisphærij, tunc vocatur Segmentum ad basim. Si verò neutrum fuerit basis, sed am-

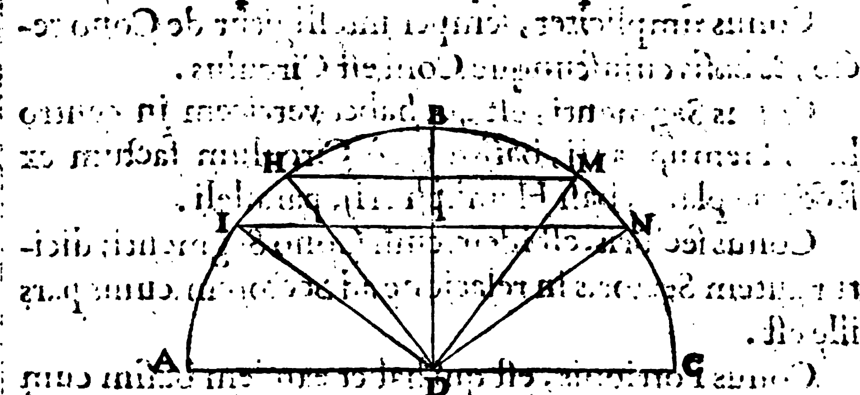
bo parallela basi, vocetur Segmentum Intermedium.

Portio Hemisphærij, est pars illa abscissa plano ad basim parallelo, habens verticem eundem cum polo Hemisphærij.

Sector Primus, est qui factus ex reuolutione Sectoris in Circulo, habet eundem axem cum Hemisphærio.

Sector Secundus, est pars Hemisphærij, quæ ex deductione Sectoris Primi relinquitur, habens eundem axem cum Hemisphærio.

Vocatur etiam Sector Secundus, vel Sector Secundus Intermedius, pars illa maioris Sectoris Primi, quæ, ablato Sectore primo minore, relinquitur.



Vt autem hæc melius intelligantur, Describatur Hemisphærium ABC cuius centrum D, axis BD, & basis circulus circa diametrum AC, cui sint duo plana parallela secantia Hemisphærium per IN & HM. Concipiantur iam omnia secta plano per axem, Vnde factus sit Semicirculus ABC, cum duabus lineis parallelis diametro AC. Ductæ iam sint ad centrum

rectæ I D, H D, M D, & N D, & ex reuolutione Sectoris H D M circa axem B D, intelligatur factus Sector Primus H D M; vel ex reuolutione Sectoris IDN circa eundem axem B D, factus Sector Primus I D N. Iam verò si ex Sectore I D N subtrahatur Sector Primus H D M, relinquetur Solidum quoddam excauatum, inter lineas (vel superficies Conicas ex lineis ID, H D, M D; & N D reuolutis circa axem B D factas) comprehensum, quod vocamus Sectorem Secundum Intermedium. Sector verò Secundus vocatur pars illa Hemisphærij quæ relinquitur deducto Sectore Primo H D M, vel I D N; Scilicet quod continetur inter basim A C & Superficiem Conicam factam ex reuolutione linearum I D, N D, vel H D M D, Segmentum, vel Segmentum ad basim, est pars Hemisphærij inter basim, & Planum parallelum I N, vel H M. Segmentum Intermedium, est quod continetur inter Plana I N & H M. Portio verò pars illa quæ inter Polum B, & aliquod Planum parallelum basi, putà H M, vel I N continetur.

Conus I D N dicitur Conus Segmenti A I N C, & in relatione ad Sectorem I D N B, dicitur Conus Sectoris. Et si ductæ fuerint rectæ I B & N B, designantes Conum IBN, vocabitur ille Conus Portionis IBN.

Truncus Coni, est pars illa Coni quæ interiacet basim & Planum basi parallelum secans ipsum;

Conus dicitur inuersè positus Hemisphærio, quando vertex eius est in centro basis Hemisphærij.

Conus dicitur Inscriptus Cono, quando vertex inscripti est in centro basis circumscripti, & basis in-

scripti

ſcripti tangit circumſcribentem in circulo.

Similiter Conus Rectus in Sphærâ inſcriptus dicitur, quando vertex eius eſt in Polo, baſis vero ad axim recta tangit ſuperficiem Sphæræ in Circulo.

Conus Rectus inſcriptus Hemiſphærio dicitur, quádo Vertex eius eſt in centro baſis Hemiſphærij, & baſis Coni tangit ſuperficiem in circulo parallelo baſi Hemiſphærij.

Conus dicitur circumſcribere Sphæram, quando Sphæra inſcripta tangit illum in centro baſis ipſius & in Circulo.

Conus dicitur circumſcribere Hemiſphærium, quando baſis Coni & Hemiſphærij habent idem Centrum, & tangunt inuicem in circulo.

Similiter etiam Coni dicūtur inſcripti vel circumſcripti Conoidibus vel Sphæroidibus, vel quibuſcunque Portionibus vel Sphærarum vel Sphæroidum, ſicut in præcedentibus iam diximus de Sphærâ, & Hemiſphærio.

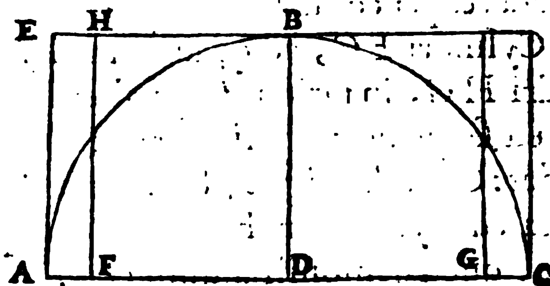
Latus Coni, vocatur quæcunque recta linea quæ à vertice ad aliquod punctum in peripheriâ baſis ipſius ducitur.

Figura genetrix dicitur, de quâcunque figurâ planâ, ex cuius reuolutione circa axem aliquem manentem fiat aliquod Solidum: Exempli gratiâ, Figura genetrix Coni eſt Triangulum Rectangulum: Conoidis Parabolici eſt Semiparabola recta, & ſic de cæteris.

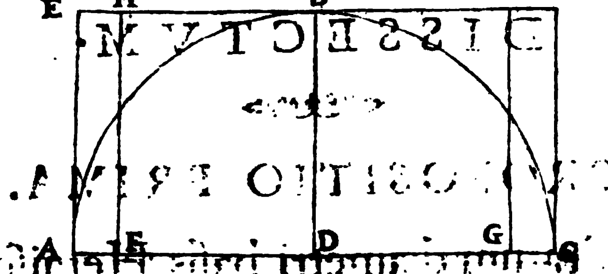
HEMISPHAERIVM DISSECTVM.

PROPOSITIO PRIMA.

Si quadratum diametri basis Hemisphærij ad quadratum diametri basis Cylindri sit in ratione sesquialtera, & sit Cylindrus eiusdem cum Hemisphærio altitudinis; erit Cylindrus Hemisphærio æqualis.



SIT Hemisphærium ABC, in quo centrum basis D, axis DB, & super basi AC, & altitudine Hemisphærij DB constituatur Cylindrus EC; sumatur iam in radio AD punctum F, vt sit quadratum AD, ad quadratum FD in ratione sesquialterâ, hoc est sicut 3 ad 2, & super circulo ex radio FD,



(cuius diameter linea FG) & altitudine BD, constituatur Cylindrus HG. Dico hunc Cylindrum æqualem esse Hemisphærio ABC.

11. duodecimi. Quoniam enim Cylindri, quorum eadem est altitudo sunt in ratione basium; bases autem, cum sint circuli, se habeant ad inuicem quemadmodum à diametris quadrata, & per constructionem, quadratum radij AD basis Cylindri EC, ad quadratum FD radij basis Cylindri HG, in ratione sesquialterâ, Cylindrus vero EC est sesquialter Hemiphærij vti demonstrauit Archimedes; Cylindrus igitur HG est in ratione subsesquialtera ad Cylindrum EC, & ideo æqualis Hemisphærio, quod demonstrandum erat.

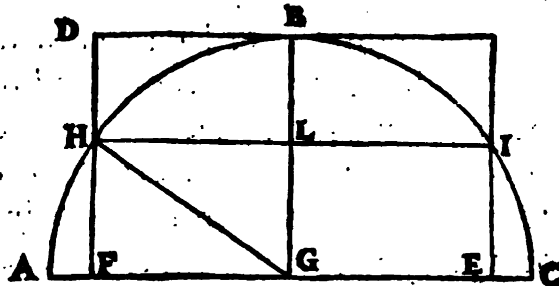
2. duodecimi.

Lib. 1. de sphæra, & Cylindro prop. 32.

PROPOSITIO II.

Si circa axem Hemisphærij constituatur Cylindrus æqualis Hemisphærio, & eiusdem altitudinis, & per intersectionem vtriusque ducatur planum secans

axem: quadratum totius axis, ad quadratum partis interceptæ inter planum secans & basim, erit in ratione tripla.



SIt enim Cylindrus D E æqualis hemisphærio ABC, constitutus circa eundem axem BG, & eiusdem altitudinis, & per intersectionem eorũdem ducatur planum H I, basi A C parallelum, intersecans axem B G in puncto L. Dico quadratum axis B G, esse triplum quadrati partis interceptæ L G: Ducatur demonstrationis gratia à puncto intersectionis H ad centrum G linea H G, quæ cum sit æqualis A G radio basis hemisphærij, erit quadratum H G ad quadratum F G sicut 3. ad 2, sed quadratum H G, æquale est duobus quadratis ex H F, & F G. Quadratum igitur H G cum sit 3 & quadratum F G 2, necesse est quadratum H F esse 1, & rationem quadrati H G ad quadratum H F sicut 3 ad 1. Cum autem B G & H G sint æquales, sicut etiam L G & H F, in eâdem ratione erit axis B G, ad L G partem interceptam: Quadratum igitur axis est ad quadratum partis interceptæ inter planum secans & basim in ratione triplâ: quod erat propositum.

SCHOLIVM.

Hic opportunum erit obseruare quod proportiones laterum trianguli G H F eædem sint, quæ diametri sphæræ, lateris pyramidis, & lateris cubi in eadem sphæra inscriptibilium. Quod licet non admodum ad rem præsentem faciat, nec in decursu libri ad sequentes propositiones multum inseruiat; tamen, quoniam Cylindri H E omnium in Hemisphærio inscriptibilium maximi, vti postea demonstrabitur, basis ex radio G F, altitudo vero ex axe G L (quæ dimidia sunt latera Pyramidis & Cubi in eadem sphæra inscriptibilium, vt mox patebit) constitutæ sunt; visum est ea de re lectorem admonere; cum præsertim vtile possit esse ad multa id animaduertisse.

Laterum autem trianguli cum tribus dictis lineis similitudo, ex eo quod modo insinuatum est satis elucere potest; quia nimirum tres lineæ quæ triangulum illud componunt, horum laterum sunt dimidia; sphæræ quidem semidiameter G H, dimidium Pyramidis latus G F, ac demum lateris Cubi dimidium H F, quæ omnia breuiter ostendo.

Ac primum quod G H sit semidiameter sphæræ manifestum est, cum axi Hemisphærij B G æqualis sit.

Deinde quod G F sit dimidium lateris Pyramidis, inde probatur: quia diameter sphæræ (vt demonstrauit Euclides) est potentiâ sesquialtera lateris Pyramidis 13. lib. 13.
quæ ipsi potest inscribi: ostensum autem est, ita se ha- 1. huius.

bere

bere A C diametrum sphæræ ad rectam F E; Erit igitur F E latus Pyramidis sphæræ inscriptibilis, atque adeo G F eius lateris dimidium.

Denique quod H F sit dimidium lateris cubi, simili ratione concluditur. Cum enim in hac propositione probatum sit, quod B G, seu quod idem est H G axis, seu semidiamiter Hemisphærij sit potentiâ tripla rectæ H F, quod ipsum demonstrauit Euclides de ratione diametri sphæræ ad latus cubi inscriptibilis, erit H F dimidium lateris cubi; eadem enim est ratio dimidij ad dimidium, quæ totius ad totum. 15. lib. 13.

PROPOSITIO III.

Circulus, cuius radius est linea à vertice sectoris ad marginem superficiei eius sphæricæ, est æqualis superficiei sphæricæ ipsius sectoris.

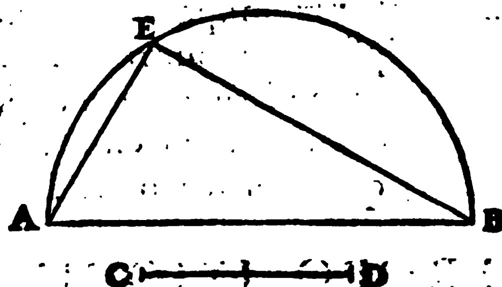
DEmonstratur ab Archimede libro primo de sphæra & Cylindro propositione tricesimâ sextâ, & tricesimâ septimâ.

COROLLARIVM.

Vnde sequitur, quod superficies sphæricæ sunt inter se, sicut quadrata linearum subtendentium à polo hemisphærij vel sectoris, ad marginem superficiei sphæricæ, vel radij circulorum æqualium superficiei sphæricæ.

PROPOSITIO IV.

Quadratum lineæ minoris à quadrato maioris ſubtrahere.

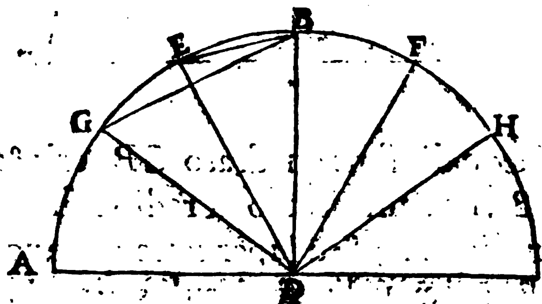


SIt data linea A B maior, & CD minor, & oporteat ex quadrato lineæ A B ſubtrahere quadratum lineæ C D: Super linea A B deſcribatur ſemicirculus A E B, in quo à puncto A applicetur linea A E æqualis datæ C D, & ducatur E B; dico quod E B eſt linea quæſita: Cum enim quadratum A B ſit æquale quadratis ex A E, & E B, ſi ſubducatur à quadrato A B quadratum ex E A, quod reliquum eſt æquale erit quadrato ex E B: eſt igitur E B linea quæſita.

PROPOSITIO V.

Superficies ſpærica ſectoris ſecundi æqualis eſt circulo, facto à radio cuius quadratum vna cum quadrato radij circuli

æqualis superficiei sphæricę sectoris primi simul, sunt æqualia quadrato lineæ quæ à polo ad marginem inferiorem sectoris secundi ducitur.

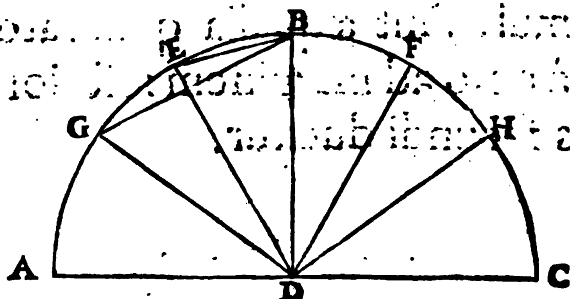


Sit enim Hemisphærium A B C, in quo sit sector primus E D F, sector vero secundus G E D F H, axis B D, & à polo B ducantur lineæ B E, B G, ad margines sectorum.

Cum igitur circulus factus à radio E B æqualis sit superficiei sphæricæ sectoris E D F, circulus etiam à radio B G, æqualis sit superficiei sphæricæ sectoris totius G D H, hoc est sectoris primi E D F, & sectoris secundi G E D F H: Circuli autem cum sint in ratione quadratorum radiorum suorum, erit & superficies sphærica sectoris E D F, ad superficiem sphæricam sectoris G D H, sicut quadratum lineæ E B ad quadratum lineæ G B: Subducatur igitur ex quadrato lineæ G B, quadratum E B & sit linea I, cuius quadratum vna cum quadrato E B, simul sumpta æqualia sint quadrato G B: Quoniam igitur quadratum E B vna cum

3. huius.

4. huius.



quadrato I æqualia ſunt quadrato G B, erit & circulus ex radio E B vna cum circulo ex radio I ſimul æquales circulo ex radio G B; Sed ſuperficies ſphærica ſectoris primi E D F, cui æqualis eſt circulus ex radio E B, vna cum ſuperficie ſphærica ſectoris ſecundi conficiunt ſuperficiem ſphæricam ſectoris G D H, cui æqualis eſt circulus ex radio B G; Superficies igitur ſphærica ſectoris ſecundi G E D F H, æqualis eſt circulo ex radio I, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Hinc infertur quod ſi ducatur linea AB, circulus factus à radio A B æqualis erit ſuperficiei ſphæricæ Hemiſphærij, & quod ſuperficies ſectorum primorum ſint ad ſuperficiem ſpęricam Hemiſphærij in ratione quadratorum linearum ſubtenſarum ad quadratum A B ſubtenſæ à polo ad marginem Hemiſphærij; & quod ſecundorum ſectorum ſuperficies ſphæricæ ſint ad ſuperficiem ſphęricam Hemiſphęrij ſicut exceſſus quadrati ſubtenſę maioris ſupra minorem ad quadratum ſubtenſę à polo ad marginem Hemiſphęrij.

PROPOSITIO VI.

Sector ad Hemisphærium est in ratione superficiei sphæricæ sectoris, ad superficiem sphæricam Hemisphærij.

HOc consequitur ex demostratione Archimedis libro primo de sphæra & Cylindro propositione vltima, vbi demonstrat quod conus habens basim æqualem superficiei sphæricæ sectoris, altitudinem vero æqualem radio sphæræ, æqualis sit sectori: Vnde consequitur, quod conus habens basim æqualem superficiei sphæricæ hemisphærij, altitudinem vero æqualem radio, sit æqualis Hemisphærio: Coni autem, quorum eadem est altitudo, sunt in ratione basium; sunt igitur & sectores, quorum superficies sphæricæ sunt sicut bases, altitudines vero eædem, scilicet radius sphæræ quorum sunt sectores, in ratione superficierum sphæricarum, quod erat propositum.

COROLLARIVM.

Ex hoc docemur, quomodo Sectori dato constituendus sit Conus in eadem altitudine, æqualis: Si enim ducatur per polum Sectoris planum basi Hemisphærij parallelum, & in eo facta fuerit basis coni æqualis superficiei sphęricæ Sectoris, & habentis eundem cum Sectore verticem, erit ille conus ęqualis Sectori dato. Similiter & cono dato, cuius radius basis minor

ſit quam ſubtenſa à polo ad marginem Hemiſphærij, altitudo vero linea æqualis axi Hemiſphęrij, conſtitui poteſt ſector ęqualis. Ducatur enim recta ęqualis radio baſis coni, quę applicetur à polo Hemiſphęrij ad aliquod punctum in ſuperficie eiuſdem, à quo etiam ducatur recta ad centrum Hemiſphęrij, & ex reuolutione eiuſdem circa axem Hemiſphærij, factus erit Sector ęqualis cono dato.

LEMMA DEFINITIVVM.

Si ſint duo vel plura ſolida vel plana eiuſdem altitudinis, quę cum ſecta fuerint lineis vel planis parallelis etiamſi infinitis, & per ſingula plana vel ſolida, partes linearum vel planorum interceptę habeant viciſſim eandem rationem vel proprietatem. Dico, tota plana vel ſolida, eaſdem rationes vel proprietates habere quas habent lineę vel plana intercepta; & quod omnes, & ſingulę partes quęcumque, vel planorum vel ſolidorum inter eaſdem lineas vel plana interceptę, ſint in eâdem ratione ſeu proprietate.

Hoc elicitur èx demonſtratis ab Archimede, & alijs inſignibus Mathematicis per viam exceſſuum, & defectuum, & proportionum, & demonſtrari potuit per propoſitionem quintam Archimedis de conoidibus, & ſphæroidibus, ope Corollarij eidem propoſitioni annexę, vbi demonſtrat proportionem ellipſis ad circulum circa maiorem ellipſis diametrum, eſſe ſicut minoris diametri ad maiorem.

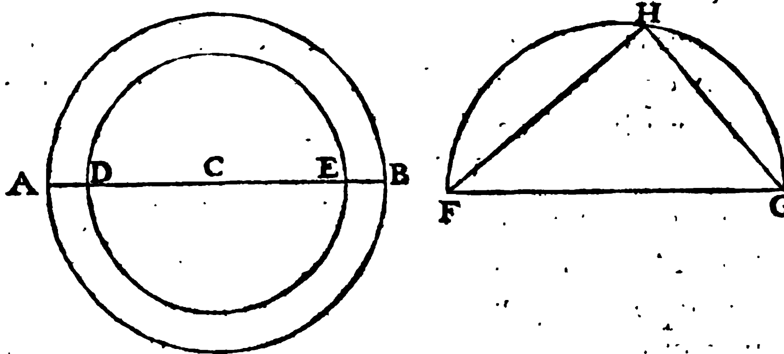
Nota. Animaduertendum etiam eſt, quod breuitatis cau-

ſa ſæ-

ſa ſępe omiſſę ſunt in conſtructionibus, ſectiones figurarum per axem, quę licet in multis ſequentium propoſitionum, ſicuti & in vltima præterita, videantur neceſſarię, attamen quoniam earum ſuppoſitio ſatis obuia eſt lectori, minus neceſſarium duxi eas demonſtrationibus inſerere.

LEMMA.

Si fuerint duo Circuli inæquales circa idē centrum, & ex quadrato diametri maioris ſubductum fuerit quadratum diametri minoris, reliqui quadrati latus æquale erit diametro Circuli, æqualis exceſſui maioris ſupra minorem.



SIt circulus cuius diameter A B, centrum C, & circa idem centrum alius minor cuius diameter DE; oporteat autem tertium exhibere, qui exceſſui maioris ſupra minorem æqualis ſit. Ducatur recta F G, ęqualis diametro A B, deſcriptoque ſuper illâ ſemicir-

culo F H G, a puncto F, applicetur linea F H, ęqualis diametro circuli minoris D E, quę cum minor sit diametro F G, cadet intra semicirculum in puncto H, peripherię, a quo ducatur H G linea, faciens triangulum rectangulum F H G. Dico lineam H G, ęqualem esse diametro circuli quęsiti.

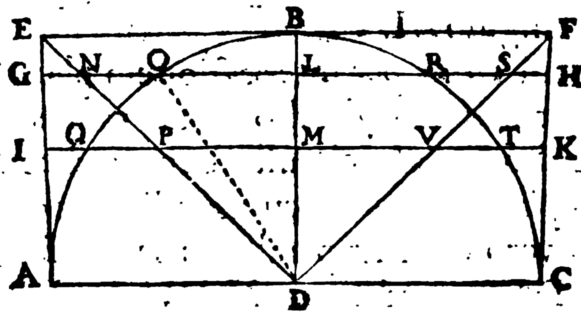
2. duodecimi. Quoniam enim circuli sunt inter se sicut quadrata diametrorum suorum, linea autem F G, ęqualis est diametro A B, & linea F H, ęqualis diametro D E, erit sicut quadratum F G, ad quadratum F H, ita circulus ex A B diametro, ad circulum ex diametro D E, & per conuersionem rationis sicut quadratum F G, ad quadratum H G, ita circulus maior circa diametrum A B, ad excessum quo maior excedit minorem circa diametrum D E; sed quadratum F G, ęquale est duobus quadratis F H, & H G. Circulus igitur ex diametro F G, ęqualis est duobus circulis ex diametris F H, & H G, & ideo circulus circa diametrum ęqualem lineę H G, ęqualis est excessui quo maior circulus circa A B diametrum excedit minorem circa diametrum D E.

Hoc Lemma vniuersale est de circulis inęqualibus licet non sint circa idem centrum, vt cuiuis manifestum esse potest; quia tamen nobis vsui non est nisi in circulis circa idem centrum, visum est illud hic ita proponere.

PRO-

PROPOSITIO VII.

Si ſuper baſi Hemiſphærij conſtitutus fuerit Cylindrus eiuſdem cum Hemiſphærio altitudinis, & in eodem inſcribatur Conus rectangulus inuerſe poſitus; erit hic æqualis exceſſui Cylindri ſupra Hemiſphærium, & in omnibus partibus vbicunque interceptis inter plana ad baſim parallela, partes viciſsim interceptæ æquales erunt.



SIt Hemiſpherium A B C, centrum D, axis B D, & ſuper baſi A C, Cylindrus E C, eiuſdem cum hemiſpherio altitudinis, & in eo conſtitutus Conus EDF, inuerſe poſitus, habens verticem in centro D; qui, cùm baſis radius E B, equalis ſit altitudini B D, erit rectangulus; Secentur vtcunque omnia duobus planis

GH, & IK, basi AC, parellelis, & iterum secentur plano per axem BD, ad basim recto, faciente in Hemisphęrio semicirculum ABC, in cono triangulum rectangulum EDF, & in planis parellelis, lineas GH, IK. Dico partem solidam Cylindri EC, quę est extra Hemisphęrium, & notatur literis AEBFC, vel excessum Cylindri supra Hemisphærium, ęqualem esse Cono rectangulo EDF.

Quoniam enim per intersectionem plani GH, factus est circulus in Cylindro, cuius radius est recta GL, in cono etiam circulus cuius radius NL, & in Hemisphęrio circulus cuius radius linea OL; radius NL vero cum sit parallelus lateri EB, in triangulo EDB, erit ad lineam LD, sicut EB ad BD, & ideo ęqualis LD; Et si ducatur a puncto O, ad centrum linea OD, erit quadratum ex OD, ęquale duobus quadratis OL, & LD, hoc est quadratis ex OL, & NL; sed GL, & OD, sunt ęquales; Igitur quadratum ex GL, ęquale est quadratis ex OL, & NL; & ideo circulus factus ex radio GL, ęqualis erit duobus circulis ex radijs NL, & OL; sed & idem circulus

ex

ex radio G L, equalis est circulo ex radio O L, vna cum excessu facto ex parte G O; Quod igitur factum est ex parte G O, equale est ei quod factum est ex radio N L, ac proinde circulus ex radio N L, equalis est excessui circuli ex radio G L, supra circulum ex radio O L, supra circulum ex radio O L. Sed N L, est radius circuli in cono rectangulo E D F, & quod factum est ex parte G O, est excessus circuli in Cylindro supra circulum in Hemisphærio. Excessus igitur circuli facti in Cylindro, supra circulum factum in hemisphęrio per intersectionem eiusdem plani paralleli G H, equalis est circulo facto in cono rectangulo. Lemma præcedés.

Simili modo demonstrabitur quod circulus factus a radio P M, equalis erit excessui circuli in Cylindro ex radio I M, supra circulum in Hemisphærio ex radio Q M, scilicet ei quod ex parte I Q, factum sit; & similiter in omnibus partibus licet in infinitas sectus fuerit Cylindrus. Pari ratione demonstrabitur, quod singule partes intercepte inter eadem plana parallela, singulis partibus coni correspondentes ipsis equales sint, scilicet quod pars Cylindri E C, notata literis G O Q I R H K T, sit equalis parti Coni rectanguli notatę literis N P V S, quę inter plana parallela G H, I K, intercipiuntur. Et quod totus excessus equalis sit toti Cono, quod demonstrandum erat.

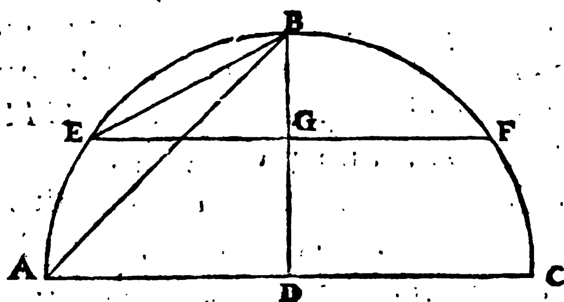
COROLLARIVM.

Patet ex demonstratis quod cum Cylindrus sit triplus coni super eadem basi & eiusdem altitudinis, hemisphærium erit duplum Coni in ipso inscripti. 10. duodecimi.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

Si Hemiſphærium ſectum fuerit plano baſi parallelo, ſuperficies eius ſphęrica ſecabitur in eâdem ratione quâ ſecatur axis.



SIt Hemiſphærium ABC, ſectum plano EF, baſi parallelo, ſecante axem BD, in puncto G; Dico quod ſicut BD, ad BG, ita ſe habet ſuperficies ſphęrica hemiſphęrij ABC, ad ſuperficiem ſphęricam portionis EBF: Ducantur enim lineę BA, BE; & quoniam ſuperficies ſphęrica ABC, eſt ad ſuperficiem ſphęricam EBF, ſicut quadratum lineę BA, ad quadratum lineę BE; eſt autem quadratum lineę BA, ęquale rectangulo ex duplâ BD, in BD, & quadrato linea BE, ęquale eſt rectangulum ex duplâ BD, in BG; rectangula autem ſuper baſibus ęqualibus ſunt in ratione altitudinum, rectangulum igitur ex dupla BD, in BD; ad rectangulum ex eadem dupla BD, in BG, ſe habet ſicut BD, ad BG: ſed & quadrata AB, & EB,

Per Corol, 5. huius.

cum ſint ęqualia prędictis rectangulis, ſunt in eadem ratione, ſcilicet lineę BD, ad BG. Ex ęquali igitur ſuperficies ſphęrica ABC, ſe habet ad ſuperficiem ſphęricam EBF, ſicut BD, ad BG: Si igitur ſectum fuerit Hemiſphęrium &c. quod demonſtr.

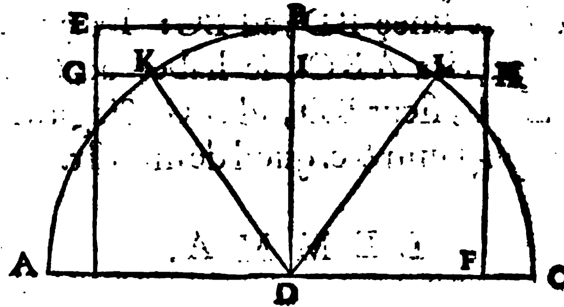
LEMMA.

Cum ab Archimede demonſtratum ſit, quod ſectores ęquales ſint conis, quorum baſes ſunt ęquales ſuperficiebus ſphęricis ſectorum, & altitudines ęquales radio ſphęrę; Sequitur Sectores tanquam conos eiuſdem altitudinis eſſe inter ſe ſicut ſuperficies eorum ſphęricę ſeu baſes: ad Hemiſphęria vero eam habere rationem, quam ipſę ſectorum ſuperficies habent ad ſuperficies hemiſphęriorum quorum ſunt partes. Lib. 1. de ſphæra, & Cylindro prop. 38.

PROPOSITIO IX.

Si conſtituatur Cylindrus æqualis Hemiſphærio circa eundem axem, & ſecetur vtcunque plano baſi parallelo; pars Cylindri intercepta inter planum & baſim, æqualis eſt Sectori ſecundo in ſegmento ſphæræ inter eadem plana intercepto.

SIt Heſphęrium ABC, cui ęqualis & circa eundem axem BD, ſit conſtitutus Cylindrus EF, & ſecentur ambo plano GH, baſi AC parallelo, ſecante 1. huius.



axem in puncto I, & hemisphærium in K L, vnde facti sunt ad centrum D, duo sectores, scilicet primus K D L B, & Sector secundus A K D L C: Dico Cylindrum G F, qui est pars Cylindri E F, intercepta inter basim & planum parallelum G H, æqualem esse sectori secundo A K D L C.

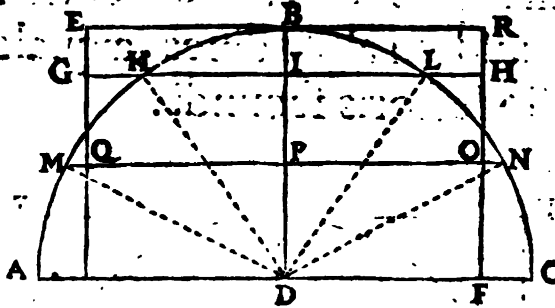
Per 9. huius: Cum enim sit sicut B I, ad B D, ita superficies sphærica K B L, ad superficiem hemisphærij, & sicut superficies sectoris K D L B, ad superficiem hemisphærij, ita sector ad Hemisphærium, erit ex æquali,

6. huius. & diuidendo sicut B I, ad I D, ita superficies sphærica K B L, ad superficiem sphæricam sectoris secundi A K D L C, & ita sector K B L D, ad reliquum Hemisphærij dempto sectore, hoc est ad sectorem secundum A K D L C; sed sicut B I, ad I D, ita etiam pars Cylindri E H ad partem G F. Ex æquali igitur, cum sit totus Cylindrus E F, æqualis Hemisphærio A B C, erit pars G F, æqualis sectori secundo A K D L C. quod erat.

COROLLARIVM.

I. Manifestum est etiam, quod Cylindrus E H, sit

æqualis ſectori primo K B L D, & quod exceſſus eius ſupra portionem K B L I, videlicet qui notatur literis E G K B L H R, ſit æqualis Cono K D L.

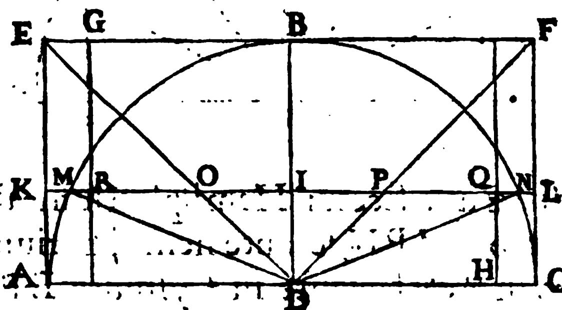


Quod ſi iterum ſecetur Hemiſphærium alio plano parallelo vtpote M P N, ſecante hemiſphærium in MN, axem vero in P, & faciente in Cylindro E F, partem, G O, interceptam inter plana G H, & M N; ſequitur ſectorem ſecundum vel intermedium MKDLN, æqualem eſſe parti Cylindri interceptæ inter eadem plana, videlicet parti G O: 2.

Cum enim ſit ſicut B I, ad I D, ita Cylindrus E H, ad Cylindrum G F; & ita ſector K D L, ad ſectorem ſecundum A K D L C; & ſicut B P, ad P D, ita ſector M B N D, ad ſectorem ſecundum A M D N C: erit ſicut B I, ad B P; hoc eſt ſicut Cylindrus E H, ad Cylindrum E O, ita ſector K B L D, ad ſectorem M B N D; & diuidendo ſicut B I, ad I P, vel Cylindrus EH, ad Cylindrum G O; ita ſector K B L D, ad ſectorem ſecundum M K D L N; ſed ſector K B L D, æqualis eſt Cylindro EH. Igitur ſector ſecundus MKDLN, æqualis erit Cylindro G O.

PROPOSITIO X.

Conus in segmento vnà cum cono rectangulo eiusdem altitudines, æquales sunt dimidio sectoris secundi.



Sit enim Hemisphærium A B C, centrum D, axis B D, Cylindrus E C, super basi hemisphærij, & eiusdem altitudinis; conus rectangulus E D F, Cylindrus etiam G H, æqualis hemisphærio, & eiusdem altitudinis; & sit planum K L, parallelum basi, secans omnia, Cylindrum G H, in R, & Q, conum rectangulum in O, & P, hemisphærium in M, & N, & axem eorum communem in puncto I; Dico quod conus M D N in segmento, vnà cum cono rectangulo O D P simul sumpti æquales sint dimidio sectoris secundi A M D N C.

7. huius. Cum enim demonstratum sit quod conus rectangulus sit æqualis excessui Cylindri super segmentum intercepti inter eadem plana parallela, erit conus ODP,

æqualis

æqualis excessui AKMNLC, qui est excessus Cylindri EC, supra partem Hemisphærij ABC, interceptam inter planum KL parallelum & basim hemisphærij AC; Si igitur addatur conus MDN, erunt simul sumpti conus rectangulus ODP, cum cono segmenti MDN, æquales toti excessui Cylindri KC, supra sectorem secundum AMDNC: sector vero secundus æqualis est Cylindro RH, qui pars est Cylindri GH, æqualis Hemisphærio & inter eadem plana intercepta; Cylindrus etiam KC, cum sit eiusdem altitudinis, se habet ad Cylindrum RH, sicut basis ad basim scilicet in ratione sesquialtera, hoc est sicut 3 ad 2; igitur Cylindrus KC, est Cylindri RH, vnum cum dimidio, & ideo æqualis sectori secundo AMDNC, vna cum dimidio: Sed sector secundus vna cum cono segmenti MDN, & cono rectangulo ODP, simul, æquales sunt Cylindro KC; hoc est tribus, qualium sector secundus æqualis est duobus; reliqui igitur conus rectangulus cum cono segmenti conficiunt vnum, & ideo æquales sunt dimidio sectoris secundi AMDNC, quod erat demonstrandum.

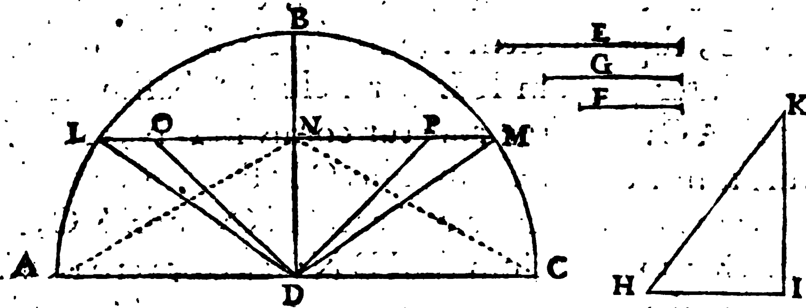
9. huius.

2. huius.

PROPOSITIO XI.

Conum segmenti ad Conum rectangulum eiusdem altitudinis in quacunque datâ ratione constituere.

Sit Hemisphærium ABC, centrum D, axis BD, & data sit ratio E, ad F, in qua oporteat constituere



conum segmenti ad conum rectangulum eiusdem altitudinis: Sit igitur G, media proportionalis inter E, & F, & fiat triangulum rectangulum H I K, cuius basis K I sit æqualis E, & latus H I, circa angulum rectum æquale G; Fiat iam angulus B D L, æqualis angulo K H I, & per punctum L, in superficie Hemisphærij transeat planum basi A C, parallelum, faciens segmentum A L M C, in quo sit conus segmenti L D M; a puncto etiam N, intersectionis plani cum axe, in plano sumatur punctum O, ita vt O N, æqualis sit N D, & ex reuolutione trianguli O N D, fiat conus rectangulus O D P: Dico conum segmenti L D M, ad conum rectangulum O D P, habere rationem quam habet linea E, ad lineam F:

11. duodecimi. Quoniam enim coni L D M, & O D P, sunt eiusdem altitudinis, sunt inter se sicut bases; sunt autem 2. duodecimi. bases in dupla ratione radiorum suorum; per constructionem vero factus est radius O N, æqualis lateri N D, trianguli L N D; triangulum vero L N D, æquiangulum est triangulo K H I, & ideo se habet L N ad N D, sicut K I, ad I H; Sed N O, æqualis est N D, est igi-

tur LN, ad NO, sicut KI, ad IH; Cum ergo LN sit radius basis coni LDM; ON, vero radius basis coni ODP, erit conus LDM, ad conum ODP, in dupla ratione LN, ad ON, hoc est sicut E, ad F, quod erat propositum.

Aduertendum est quod si velis conum inscriptum segmento esse minorem cono rectangulo in ratione data, tunc faciendus est angulus LDN, æqualis minori angulo trianguli HIK, scilicet angulo ad K, & factum erit propositum.

COROLLARIVM.

Ex hac propositione elicitur etiam quod si constituatur conus super basi Hemisphærij & eiusdem altitudinis cum reliquis, erit conus ille æqualis duobus conis LDM, & ODP. Sit enim conus ANC, super basi hemisphærij AC, & eiusdem altitudinis DN; & quoniam radius basis AD, æqualis est lineæ LD, erit quadratum ex AD, æquale duobus quadratis ex LN, & ND, sed ND, & NO, sunt æquales; Igitur quadratum ex AD, æquale est duobus quadratis ex LN, & NO; & circulus ex AD, hoc est basis coni ANC, æqualis erit duobus circulis ex radijs LN, & ON, hoc est basibus duorum conorum LDM, & ODP; & ideo ambobus æqualis erit. Et per præcedentem scilicet 10. huius conus ANC, æqualis erit dimidio sectoris secundi ALDMC.

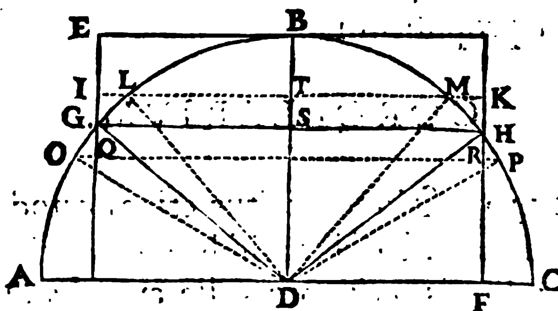
Lemma ante 7. huius.

10. huius.

PRO-

PROPOSITIO XII.

Conorum inſcriptorum ſegmentis Hemiſphærij maximus eſt ille qui inſcribitur ſegmento facto per interſectionem Cylindri æqualis Hemiſphærio.



ESto Hemiſphærium A B C, centrum D, axis B D, & circa eundem axem Cylindrus E F, æqualis Hemiſphærio, & per G H, communem interſectionem Hemiſphærij A B C, cum Cylindro E F, ducatur planum parallelum faciens in Hemiſphærio ſegmentum A G H C, in quo conſtituatur conus G D H. Dico hunc eſſe maximum omnium qui in Hemiſphærio poſſunt inſcribi: Ducatur enim aliud planum baſi A C parallelum, faciens ſegmentum in hemiſphærio, in quo ſit conus L D M, qui ſit vel maior vel æqualis ſi fieri poteſt.

9. huius. Quoniam igitur ſector ſecundus A G D H C, æqualis eſt Cylindro G F, eo quod pars ſit Cylindri E F,

æqualis Hemiſphærio, & eiuſdem altitudinis; ſi ex ambobus dempta fuerit pars communis G N D H F, reliqua pars Cylindri, hoc eſt conus G D H, reliquæ parti ſectoris ſecundi, quæ notatur literis A G N, H F C, æqualis erit. Sed conus L D M, ſegmenti A L M C, ſupponitur eſſe vel maior, vel æqualis cono G D H: eſt igitur vel maior vel æqualis exceſſui A G N F H C. Cylindrus vero I F, eſt æqualis ſectori ſecundo A L D M C; demptâ itaque ex vtroque parte communi, quæ notatur literis N G L D M H F, erit reliqua pars ſectoris ſecundi æqualis reliquæ parti Cylindri; hoc eſt pars A G N F H C, æqualis cono L D M, vna cum parte G I L M K H: conus itaque G D H, maior eſt cono L D M, excedit enim illum quantitate partis G I L M K H.

Iterum ſi ducatur planum inferius O P, faciens ſegmentum in Hemiſphærio A O P C, in quo ſit conus O D P, dico etiam hunc minorem eſſe cono G D H.

Cum enim baſis coni O D P, maior ſit quam baſis coni G D H, ſecabit latera Cylindri E F; ſecet igitur in Q, & R, & ſector ſecundus A O D P C, æqualis erit Cylindro Q F, ex quibus demptâ parte communi, reliquæ partes erunt æquales. hoc eſt A O N, F P C, æqualis erit cono O D P, demptâ parte inter O, & Q, & inter R, & P, quibus vtrinque additis erit totus exceſſus A O Q N, F R P C, toti cono O D P, æqualis, ſed pars A O Q N, F R P C, minor eſt cono G D H, quantitate partis O G Q, R H P; minor igitur eſt conus O D P, cono G D H: maximus ergo eſt conus G D H, omnium qui inſcribi poterunt in Hemiſphæ- 9. huius.

rio; cum omnes qui vel supra vel infra inscribuntur minores sint. Conorum igitur inscriptorum &c.

SCHOLIVM.

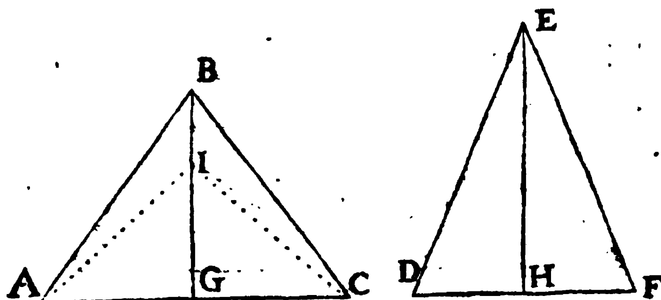
Ex huius Theorematis demonstratione duo se præbent obseruatione digna. Primum quod proportio laterum huius trianguli G D S, ex cuius reuolutione factus est conus G D H, est ea quam notauimus in Corollario ad secundam propositionem huius, scilicet diametri sphæræ, lateris Cubi, & lateris Pyramidis in eâdem sphærâ inscriptibilium, sunt enim eorum dimidia. Vnde etiam sequitur, quod cum conus GDH, sit maximus inscriptibilis, Cylindrus G F, erit maximus Cylindrorum qui eodem Hemisphærio inscribi poterit.

Secundum, quod licet conus G D H, sit maximus qui in Hemisphærio inscribi poterit; attamen triangulum G D S, ex cuius reuolutione factus est, non sit maximum triangulum. Ponatur enim quod in triangulo L D T, latera L T, & T D, facta fuerint æqualia, quod fieri potuisset, cum in triangulo G D S, latus G S, maius sit latere S D: Cum igitur latera L T, & D T, sint æqualia, si ab angulo T, demittatur perpendicularis in latus L D, erit perpendicularis æqualis dimidiæ L D, & spatium contentum in triangulo L D T, æquale erit quadrato ex perpendiculari: In triangulo vero G D S, si a puncto S, demissa fuerit perpendicularis ad basim G D, non cadet in dimidium basis G D, & ideo minor erit perpendicularis quam li-

nea quæ ab S, ad dimidiam GD, duceretur; linea vero quæ ab S, ad dimidiam GD, ducetur, æqualis erit dimidiæ GD: ſpatium igitur contentum in triangulo GDS, æquale eſt rectangulo ex perpendiculari & dimidia baſis GD, & minus igitur quam quadratum ex dimidia GD, vel perpendiculari in triangulo LDT, & ideo triangulum GDS, minus triangulo LDT.

LEMMA.

Coni ſunt inter ſe in ratione compoſitâ ex baſibus & altitudinibus.



SInt duo coni ABC, & DEF, quorum altitudines ſint rectæ BG, & EH; Dico rationem coni ABC, ad Conū DEF; eſſe cōpoſitam ex rationibus baſis AC ad baſim DF, & altitudinis BG, ad altitudinem EH. Fiat enim ſicut baſis AC, ad baſim DF, ita linea EH, ad lineam GI, in rectâ BG, ſi opus productâ; & erit conus ex baſi AC, & altitudine GI, æqualis cono DEF: Quare conus ABC, eſt ad conum DEF, ſicut linea BG, ad lineam IG; compoſita autem eſt ratio BG, ad IG, ex rationibus BG, ad EH, & EH, ad

IG; hoc est altitudinis coni ABC, ad altitudinem coni DEF, & basis eiusdem coni ABC, ad basim coni DEF. Composita igitur est ratio ipsorum ad inuicem sicut enuntiatum est.

PROPOSITIO XIII.

Inscribere Hemisphærio duos conos in ratione datâ.

Sit ratio data R, ad S, in qua inscribendi sint Hemisphærio duo coni. Fiat igitur triangulũ rectangulum EFG, cuius latera EF, & FG, circa angulũ rectũ F, sint æqualia lineis S, & R, & ex radio æquali GE, describatur semicirculus ABC, cuius centrum D, a quo perpendicularis erigatur DB: facto iam angulo BDH æquali angulo FEG, ducatur linea DH; Iterum fiat angulus BDI, æqualis angulo EGF, & ductâ lineâ DI, ad peripheriam circuli, a punctis I, & H demittantur ad lineam BD, perpendiculares IL,

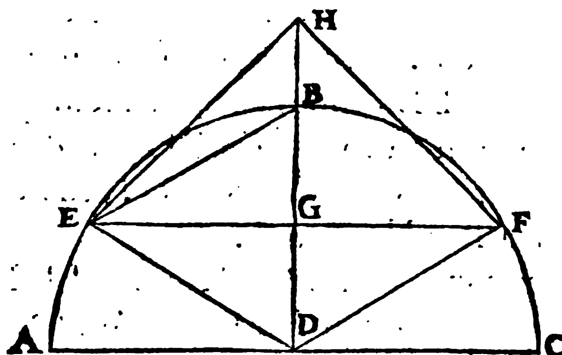
& H K; triangula iam facta I L D, & HKD; sunt ambo similia & æqualia triangulo E F G, quare etiam ad inuicem sunt æqualia. Reuoluantur iam omnia circa axem manentem B D, vnde facta sint Hemisphærium A B C, & duo coni in eo inscripti I D N, & H D M: Dico conos inscriptos H D M, & I D N, esse ad inuicem sicut linea R ad lineam S.

Cum enim conus H D M, ad conum I D N, sit in ratione compositâ ex basi H M ad basim I N, & altitudine K D ad altitudinem L D; bases autem H M, & I N, sint inter se sicut quadrata H K, & I L, radiorum suorum; H K, vero æqualis sit L D, & I L, æqualis K D; basis H M, ad basim I N, se habet sicut quadratum L D, ad quadratum K D; altitudines vero conorum sunt ipsæ L D, & K D, quare proportio coni H D M, ad conum I D N, composita est ex quadrato L D, ad quadratum K D, vel ex duplâ ratione L D, ad K D, & ex lineâ K D, ad lineam L D, hoc est ratione simplâ K D, ad L D: deductâ igitur simplâ ratione L D ad K D, (vel quod idem est additâ ratione K D, ad L D) ex duplâ ratione L D, ad K D, quæ remanet erit simpla ratio L D ad K D; & ideo conus H D M, erit ad conum I D N, sicut linea L D, ad lineam K D, vel R, ad S, quod faciendum erat.

PROPOSITIO XIV.

Dato sectori in Hemisphærio facere Rhombum æqualem.

Sit



SIt in Hemisphærio ABC, cuius centrum D, sector EBFD, datus, cui oporteat Rhombum æqualem constituere; Secetur igitur Hemisphærium per E, & F, plano ad basim parallelo, secanre etiam axem BD, in puncto G; producto iam axe quantum opus ad partes B, fiat sicut BD, & GD, tanquam vna ad duplam BD, ita BD, ad HD; & ab H, puncto in axe producto ductis lineis EH, & FH, concipiatur Rhombus EHFD, quem dico æqualem esse Sectori EBFD.

Quoniam enim rectangulum ex duplâ BD, in BG, æquale est quadrato ex EB; rectangulum etiam ex BD, & GD, tanquam vnâ in BG, æquale est quadrato ex EG; rectangula autem quorum eadem est altitudo se habent sicut bases; Rectangula igitur sunt inter se sicut dupla BD, ad BD; GD simul, hoc est sicut HD, ad BD. Sed & quadratum EB, ad quadratum EG, (cum sint æqualia prædictis rectangulis) sunt in eâdem ratione sicut HD, ad BD; Circulus igitur ex radio EB, ad circulum ex radio EG, se habet sicut linea HD, ad

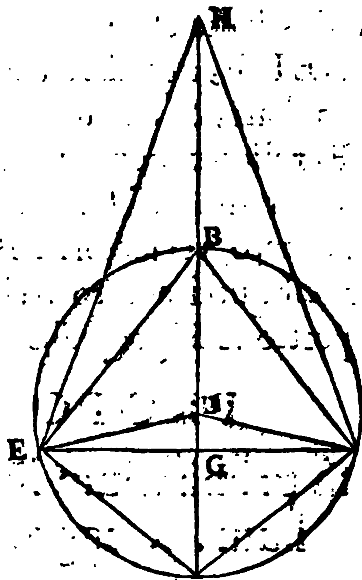
lineam

lineam BD: Rhombus vero EHFD, cum sit compositus ex duobus conis quorum eadem est basis circa diametrum EF, altitudo vero amborum est linea HD, æqualis est vni cono super eadem basi & eiusdem altitudinis; Sector etiam EBFD, æqualis est cono, cuius basis radius est linea EB, & altitudo BD: Rhombus igitur EHFD æqualis est sectori EBFD; reciprocantur enim bases, & altitudines: Factus est igitur Rhombus æqualis sectori dato, quod &c. Arch. de sph. & Cylindro 38. lib. 1.

COROLLARIVM PRIMVM.

Ex hoc patet quod conus EHF, factus est æqualis portioni EBF; dempto enim ex vtroque communi cono EDF, reliquus conus EHF æqualis est portioni EBF.

II. Iterum constat quod in maioribus etiã proportionibus sphærarum fit quoddam genus sectorum, (veluti si in portione EBF, quæ iam maior sit Hemisphærio, in quâ ad centrum ductæ sint lineæ ED, & FD in plano ex sectione per axem facto, ex quarum & portionis circuli EBF reuolutione factum erit solidum incauatum.) cuius ratio ad sphæram vel Hemisphærium erit similis ei, quam habent alij sectores

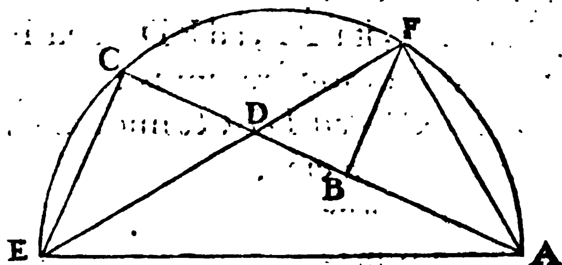


ad ſphæras vel hemiſphæria, quorum ſunt partes; ſcilicet in ratione ſuperficierum ſphæricarum ſuarum, vel rectarum quæ ſunt axes portionum; videlicet ſolidum incauatum, vel ſector E B F D erit ad ſphæram, ſicut ſuperficies ſphærica eius E B F, ad ſuperficiem totam ſphæræ; vel ſicut recta B G, altitudo portionis, ad B I, diametrum ſphæræ; quod liquido apparebit ex prius demonſtratis; quare eâdem ratione conſtruendus eſt Rhombus æqualis ſectori E B F D, maiori, quâ vſi ſumus in conſtructione minoris: Cum enim quadratum E G æquale ſit rectangulo I G B; quadratum vero E B, æquale rectangulo I B G; ideò quadratum E G, ad quadratum E B eſt ſicut linea I G, ad lineam I B. Fiat igitur ſicut I G, ad I B, ita D B, ad D H; & conus cuius baſis eſt ex radio E G, & altitudo D H, æquale erit cono cuius baſis eſt ex radio E B, altitudo vero B D; ſed conus E H F, æqualis eſt cono E D F, vnà cum cono ex eâdem baſi, & altitudine D H; dempo igitur cono E D F, reliquus conus incauatus E H F D, æqualis erit cono ex radio baſi E B, & altitudine B D, hoc eſt ſolido excauato vel ſectori E B F D. Vnde etiam manifeſtum eſt quod addito vtrique communi cono E D F, erit portio E B F æqualis cono E H F.

PROPOSITIO XV.

Datâ primâ trium linearum proportionalium, & aggregato ſecundæ & tertiæ, inuenire ſecundam & tertiam.

Sit



SIt data AB prima, & BC aggregatum secundæ & tertiæ, quæ in directum applicetur lineæ AB, & fiat vna linea recta; deinde ad rectos angulos in puncto C applicetur linea CE, æqualis AB datæ, & compleatur triangulum ACE. Describatur iam circa diametrum AE, semicirculus ECFA, transiens per punctum C; & a puncto B, ducatur BF, parallela lineæ CE ad punctum F, in periphæriâ circuli, & connectantur FA, & FE: recta vero FE secabit lineam CB, in puncto D; Dico lineam CB, diuisam esse in D, vt sit sicut AB, ad CD, ita CD, ad DB.

Quoniam enim in triangulis ECD, & ABF, anguli ad C, & B, sunt recti; anguli etiam CED, & BAF, æquales sunt, cum insistant eidem periphæriæ CF; erit & reliquus angulus reliquo angulo æqualis; & triangula ECD, ABF similia. Latus verò EC, factum est æquale lateri AB; ideo, cùm sint homologa latera subtendentia æquales angulos, erunt reliqua latera homologa reliquis lateribus homologis æqualia. Latus igitur CD, trianguli ECD, æquale est lateri FB, trianguli ABF. Cum etiam in triangulo DFA,

angulus F in ſemicirculo rectus ſit; & linea FB, perpendicularis; erunt triangula AFB, & DFB, ſimilia: & ſicut AB, ad BF, ita BF, ad BD. Sed BF æqualis eſt CD, vti iam demonſtrauimus: erit igitur ſicut AB ad CD, ita CD ad DB; & linea CB, diuiſa eſt in D, ſicut propoſitum erat.

Idem etiam efficietur hoc modo. Sit AB prima data, & ſit BC aggregatum ſecũdæ ac tertiæ, quæ fiant in directum vna linea; a puncto B, erigatur perpendicularis BD, quæ ſit media proportionalis inter AB, & BC: diuiſa iam AB bifariam in E, circa diametrum AB, ſcribatur circulus AFBG; & a puncto D, per centrum E, ducatur linea ad extremam circuli, quæ ſit DFEG. Centro etiam E, & interuallo ED, deſcribatur arcus circuli DH, qui ſecabit lineam BC in H. Dico iam quod linea BC diuiſa ſit in puncto H, vt ſint AB, BH, & HC, continue proportionales.

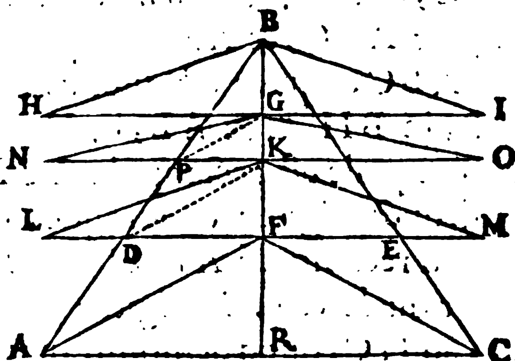
Cum enim linea DB, ſit perpendicularis AB, tanget circulum AFBG in puncto B, & ideo rectangulum GDF, æquale eſt quadrato ex DB; Iterum cum per conſtructionem facta ſit linea EH, æqualis ED; erit tota AH, æqualis toti GD; & deductis æqualibus reliquæ BH, & FD, æquales erunt inter ſeſe; rectangulum igitur AHB, rectangulo GDF, & ideo quadrato DB, æquale erit. Sed per conſtructionem re-

ctangulo ABC, factum est æquale quadratum BD; rectangula igitur ABC, & AHB, æqualia sunt. Sed rectangulum ABC, æquale est duobus rectangulis, scilicet ex AB, in BH, & ex AB, in HC; & rectangulum AHB, æquale est rectangulo ABH, & quadrato BH; deducto igitur ex vtroque, rectangulo ABH, reliquum rectangulũ AB, HC, reliquo quadrato ex BH, æquale erit. Est igitur sicut AB, ad BH, ita BH, ad HC, quod demonstrandum erat.

PROPOSITIO XVI.

Truncus coni est ad conum eiusdem basis & altitudinis, sicut tres lineæ in continuã proportione simul sumptæ ad maximam trium: Proportio autem debet esse eadem quam habet diameter basis maioris ad diametrum basis minoris eiusdem Trunci.

SIt enim conus ABC, sectus plano basi parallelo DE, faciente truncum ADEC, & conum DBE, reliquum coni ABC. Ducatur iam axis BR, secans planum DE, in puncto F, & fiat sicut quadratum AC ad quadratum DE, ita linea BF ad lineam BG; & ducto plano per G, ad basim AC parallelo, & in eo factâ basi æquali basi AC, constituatur circa axem BG, conus HBI; qui æqualis erit cono DBE; reci-



15. duodecimi. procantur enim bases & altitudines eorum. Diuidatur iam G F in puncto K, vt sint R F, F K, & K G,
15. huius continue proportionales; & per puncta F, & K, agantur plana parallela basi A C, & super singulis constituantur coni habentes bases æquales basi A C, & altitudines F K, & K G; qui sint L K M, N G O.

Et quoniam constituti sunt quatuor coni super basibus æqualibus, facientes simul altitudinem B R; e-
14. duodecimi. runt simul sumpti æquales cono A B C. Conus autem H B I, vnus ex quatuor, per constructionem factus est æqualis Cono D B E; Reliqui igitur tres, A F C, L K M, & N G O simul æquales sunt trunco A D E C. Sed isti tres coni sunt ad conum A F C, si-
14. duodecimi. cut linea G R, ad lineam F R, hoc est sicut tres lineæ proportionales ad maximam trium; erit enim R F semper maxima, vt postea demonstrabimus.

Restat iam demonstrandum, quod proportio quam habet R F, ad F K, & F K ad K G, sit eadem quæ est A C ad D E, quod sic ostendemus: Secentur omnia plano per axem faciente in vtroque cono triangulum, & in intersectione trianguli A B C, cum triangulis

L K M.

LKM, NGO, ducantur lineæ ad puncta G, & K, quæ sint PG & DK. Igitur cum triangula BAR, BDF, & BPK sint similia, erunt segmenta AD ad DP, sicut RF ad FK, & FK ad KG; Sed cum sit FK ad KG, sicut AD ad DP; Erit conuertendo & permutando; sicut AD ad FK, ita DP ad KG; & ideo lineæ AF, DK, & PG erunt parallelæ, & triangula AFR, DKF, & PGK similia; & propterea lineæ RF, FK & KG, in eâdem ratione quâ sunt AR, DF & PK.

Hoc etiam aliter demonstrabitur: Per constructionem enim facta est BF ad BG, sicut quadratum AR ad quadratum DF: Sed sicut linea AR ad lineam DF, ita est RB ad BF. Dupla igitur est ratio FB ad BG quæ RB ad FB. Si igitur fiat media proportionalis inter FB & BG, quæ sit BK, erunt quatuor lineæ continue proportionales RB, FB, KB, & GB, quarum excessus etiam erunt lineæ proportionales, & in eâdem ratione qua sunt quatuor maiores: Cum enim sit sicut RB ad FB, ita FB ad KB; Erit diuidendo sicut FB ad FR, ita KB ad KF; & conuertendo sicut FB ad KB, ita RF ad FK. Simili modo etiam demonstrabitur eandem esse rationem FK ad KG. Sunt igitur RF, FK & KG, in eâdem ratione, quâ sunt RB ad FB, vel AR ad DF, hoc est AC ad DE; & constat quod K sit idem punctum in linea FG, siue diuidatur prout in constructione, siue facta fuerit BK media proportionalis inter BG & BF, quemadmodum iam fecimus. Truncus igitur ADEC, qui ostensus est æqualis tribus Conis AFC, LKM, & NGO, est ad conum AFC, sicut ad RF maximam

trium

trium linearum proportionalium sunt tres Conorum axes, hoc est linea R G aggregatum trium proportionalium in ratione diametri A C basis maioris trunci ad D E diametrum minoris basis eiusdem trunci, quod erat demonstrandum.

Quod autem R F sit maxima trium proportionalium manifestum est: cum enim R B, F B, K B & G B sint quatuor lineæ continue proportionales, & R B earum maxima; & R F, F K, & K G earum excessus in eâdem ratione, erit necessario R F excessuum maximus.

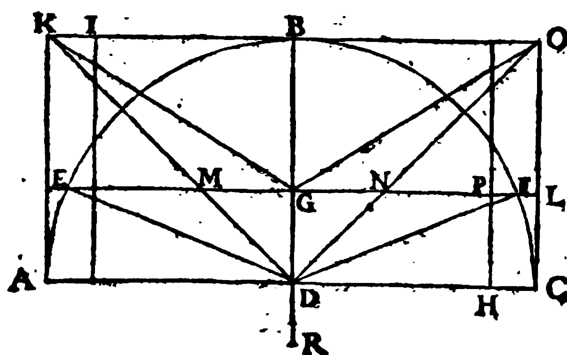
COROLLARIVM.

Conus æqualis trũco dato.

Hinc apparet quod Conus super basi A C & in altitudine R G æqualis erit trunco A D E C; Erit enim æqualis tribus Conis A F C, L K M, & N G O: Vnde sequitur quod dato Trunco Coni constitui possit Conus æqualis.

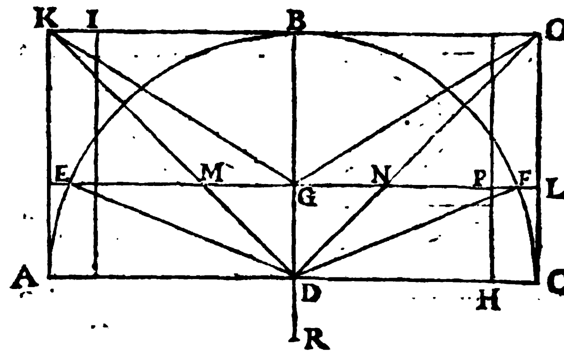
PROPOSITIO XVII.

Conus ad sectorem suum eam habet proportionem, quam ad diametrum basis Hemisphærij habent simul sumpti axis Coni vnà cum tertiâ proportionali minore, in ratione axis Hemisphærij ad axem Coni.



Esto enim Hemisphærium ABC, cuius centrũ D, & axis BD, in quo sit sector circa eundem axem EBFD, cuius Conus EDF, & producto axe fiat sicut BD ad GD axem coni, ita GD ad DR, Dico proportionem coni EDF ad sectorem EBFD, esse sicut linea GR composita ex axe coni, & tertia proportionali ad AC diametrum basis hemisphærij; Fiat enim circa eundem axem hemisphærij & super eadem basi Cylindrus KC, & in eo sit Conus rectangulus KDO; Fiat etiam Cylindrus IH æqualis Hemisphærio & eiusdem altitudinis.

Cum igitur Conus rectangulus KDO, diuisus sit per basim Coni EDF in M, & N, vnde factus est truncus KMNO; Fiat etiam in trunco, super basi KO; & eiusdem altitudinis BG, Conus KGO; Est igitur sicut KB ad MG, ita BD ad GD; sunt enim priores & secundi inter se æquales. Compositum igitur ex BD, GD, & DR, est compositum ex tribus proportionalibus in ratione KB ad MG, quarum maior est linea BD: Truncus igitur KMNO, est ad



16. huius Conum KGO sicut BD & GR simul tanquam vna ad BD. Est autem truncus KMNO æqualis excessui quo Cylindrus KL, excedit portionem EBF; excessus itaque Cylindri supra portionem EBF ad Conum KGO, est sicut BD, GR, tanquam vna ad BD. Conus autem KGO, cum sit tertia pars Cylindri KL, est dimidium Cylindri IP. Cylindrus autem IP æqualis est sectori EBFD. Igitur Conus KGO est dimidium sectoris EBFD. Habet itaque excessus Cylindri KL supra portionem EBF, ad totum sectorem EBFD, rationem quam habent BD, GR, tanquam vna ad duplam BD, hoc est ad diametrum basis hemisphærij: Sed Cylindrus KL, est sesquialter Sectoris EBFD, hoc est eum excedit vnâ tertiâ parte sui, nimirum quantitate Coni KGO; Reliquum igitur Cylindri KL, deducto Cono KGO, æquale est sectori EBFD. Excessus itaque Cylindri KL, supra conum KGO & portionem EBF, hoc est pars illa notata literis MKGON, æqualis est Cono EDF; pars enim Cylindri KL notata literis KEMNOL æqualis est portioni EBF, cum sit excessus Cylin-

7. huius.

Per 10. Euclidis 12. libri.

Conus KGO æqualis dimidio Cylindri IP.

Per 1. & 9. huius.

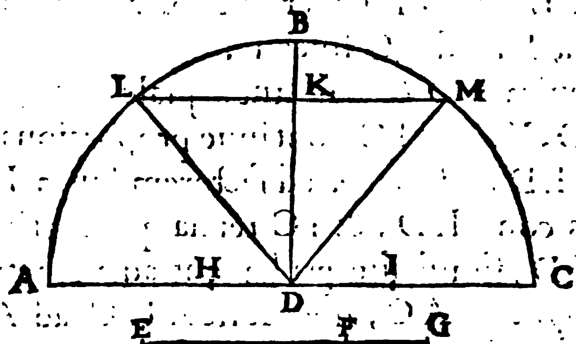
Sequitur ex 7. huius sed infra demõstrabitur.

dri KL ſupra truncum Coni KMNO.

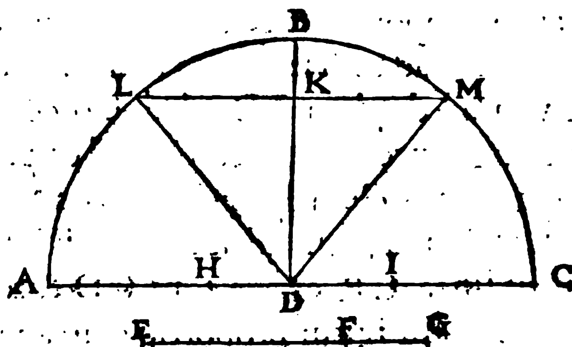
Cùm ergo proportio exceſſus Cilyndri KL ſuper portionem EBF, ad totũ ſectorem fuerit ſicut BD, GR tanquam vna ad duplam BD; deducto cono KGO & BD eum ſignante, erit ſicut GR ad duplam BD, vel diametrum baſis Hemiſphærij, ita pars MKGON vel conus EDF ei æqualis ad ſectorem EBFD: Sed compoſita eſt linea GR ex axe coni GD & tertia proportionali DR. Eſt igitur proportio coni ad ſectorem ſuum eadem quæ demoſtranda erat.

PROPOSITIO XVIII.

Inuenire Sectorem qui maior ſit cono ſuo in datâ proportione.



Sit hemiſphærium ABC, centrum D, axis BD, proportio autem data EF ad FG, in qua ſector debeat eſſe ad conum ſuum: Fiat igitur ſicut EF ad FG, ita AC diameter baſis Hemiſphærij ad HC; & datâ AD primâ, & HC aggregato ſecundæ ac ter- 15. huius.



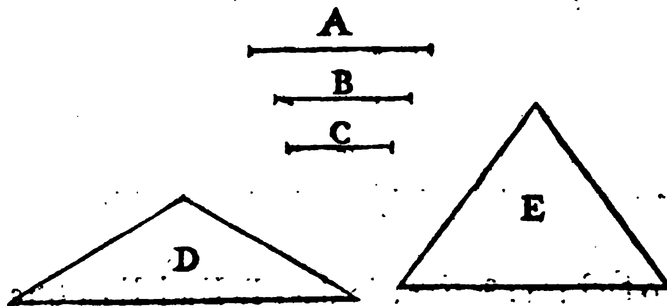
tiæ, diuidatur HC in puncto I, vt sit sicut AD ad HI, ita HI ad IC. Iam in axe DB fiat DK æqualis HI, & per punctum K transiet planum basi AC parallelum, faciet segmentum in hemisphærio in L & M, ductisque lineis LD, & MD, intelligatur in hemisphærio sector LBMD; cuius conus sit LDM. Dico Sectorem LBMD se habere ad conum suum LDM, sicut linea EF ad FG lineam.

Cum enim AD & BD sint æquales, & KD & HI, erunt BD, KD, & IC, continue proportionales; Conus vero LDM se habet ad sectorem suum LBMD, sicut axis coni KD, & IC tertia proportionalis ad BD & KD, simul sumpti habent ad diametrum basis Hemisphærij AC, hoc est sicut HC, ad AC; Facta est autem sicut EF ad FG, ita AC ad HC; est igitur sicut EF ad FG ita sector LBMD ad conum suum LDM, quod erat propositum.

per 17. huius.

LEMMA.

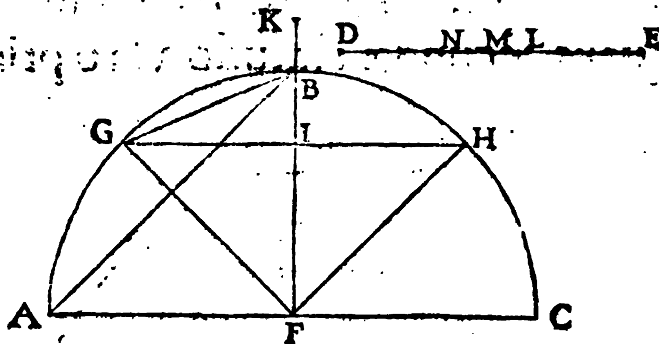
Si sint tres lineæ continue proportionales: Dico quod Conus cuius basis radius sit æqualis primæ, altitudo vero tertiæ, æqualis sit Cono cuius basis radius sit æqualis secundæ altitudo vero primæ.



SInt tres lineæ continue proportionales A, B, & C, & fiant duo coni D, & E; & coni quidem D sit linea A radius basis & altitudo linea C: Coni vero E, sit linea B radius basis, & altitudo linea A: Dico quod isti duo coni D & E sint æquales: basis enim coni D cuius radius linea A ad basim coni E, cuius radius B, est sicut linea A, ad lineam C; sunt enim circuli, & ideo in dupla ratione radiorum suorum: altitudo vero coni D, est linea C, & altitudo coni E, est linea A; & ideo reciprocantur eorum bases & altitudines; æquales sunt igitur coni D, & E. 15. duodecimi.

PROPOSITIO XIX.

Inuenire Sectorem ad Portionem suam, in data ratione maiori.



Esto factum; & sit ratio data D E ad E L, quam habeat in Hemisphærio A B C, sector G B H F ad Portionem suam G B H. Et quoniam rectangulum ex peripheria Circuli facti ex radio B F tanquam recta in radium B F, æquale est duplo basis hemisphærij, hoc est Circulo ex radio A B, vel superficiei sphæricæ hemisphærij (quod manifestum esse debet ex ijs quæ ab Archimede demonstrata sunt in libris de dimensione Circuli & de sphæra & Cylindro) superficies vero Portionis G B H, æqualis est circulo ex radio G B, & in ratione ad superficiem hemisphærij sicut B I ad B F; erit igitur rectangulum ex peripheria circuli ex radio A F tanquam recta in lineam B I æquale superficiei portionis G B H: eidem etiam superficiei æquale est re-

Per 3. huius.

Per 9. huius.

ctangulum ex GB in dimidiam peripheriam ſuam tanquam rectam; & ideo ſicut peripheria maximi circuli ex radio BF, ad dimidiam peripheriam circuli ex radio GB, ita GB ad BI, & ad dupla poſteriorum, ſicut peripheria ex radio BF, ad totam peripheriam ex radio GB, ita GB ad duplam BI; ſed ſicut peripheria ad peripheriam, ita ſe habet BF ad BG: Sunt igitur tres lineæ proportionales BF, BG & dupla BI; Conus itaque ex radio baſis BF, & altitudine dupla BI, æqualis eſt Cono ex radio baſis BG, & altitudine BF: ſed Circulus ex radio AB, duplus eſt circuli ex radio BF. Erit igitur Conus ex baſi cuius radius AB, hoc eſt ex ſuperficie hemiſphærij & altitudine BI, æqualis Cono ex baſi, cuius radius BF, & altitudine dupla BI; & ideo æqualis Cono ex radio baſis GB, hoc eſt ſuperficie ſectoris, & altitudine BF, hoc eſt Sectori GBHF.

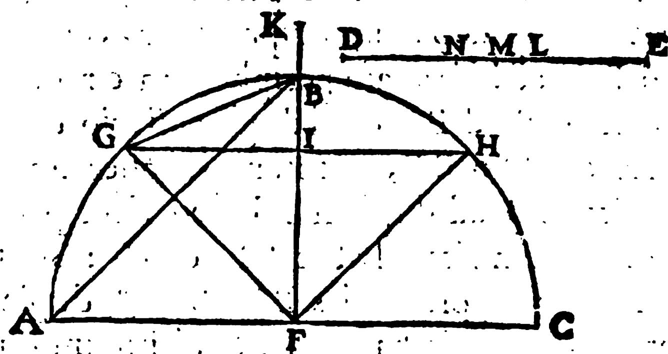
Archim. de dimenſione circuli.

Per præcedens Lemma.

Cum autem Rhombus æqualis Sectori GBHF ſupponatur habere axem ſuum diuiſum in ratione data DE ad LE; Sit KE axis Rhombi quæſiti; & quoniam conſiſtit ex duobus Conis ſuper eadem baſi, quorum alter æqualis eſt Portioni, & totus æqualis Sectori; erit axis KF, ad partem KI, ſicut ſector GBHF, ad portionem GBH. Accipiatur itaque linea DE pro axe Rhombi; quâ diuiſâ bifariam in M; fiat DM prima, & DL aggregatum ſecundæ & tertiæ; iterum diuidatur DL in N, vt ſint DM, DN, & NL, tres lineæ continue proportionales.

15. huius.

Diuidatur itaque axis Hemiſphærij ABC in puncto I, vt ſit BF ad IF, ſicut DM ad DN; & per I,



agatur planum basi A C parallelum, & ab intersectione plani cum hemisphærio, ad centrum F ducantur lineæ, constituentes in Hemisphærio Sectorem GBHF, & portionem G B H. Dico quod Sector GBHF sit sector quæsitus, & quod habeat ad Conum suum GBH rationem quam habet DE ad LE.

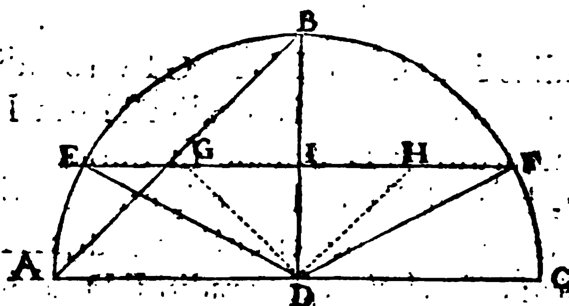
Quoniam enim DM, DN, & NL, sunt continue proportionales, linea vero DE, est dupla lineæ DM; erit sicut DE ad DL, ita Sector ad Conum suum; factum est autem sicut MD, ad ND ita BF ad IF, igitur sicut ED duplum MD ad ND, ita AC, duplum axis BF ad IF; & ad IF vna cum tertia proportionali ad BF & IF, sicut DE, ad L D: Est igitur Sector GBHF, ad Conum GFH, sicut DE ad DL, & ad portionem GBH, sicut DE ad LE; quod faciendum erat.

per 18. huius.

PRO-

PROPOSITIO XX.

Sector secundus ad Conum segmenti habet proportionem, quam habet superficies Sphærica Hemisphærij ad basim Coni.



SIt Hemisphærium ABC, Centrum basis D, axis BD, in quo punctum I, per quod secetur plano basi AC parallelo, faciente in Hemisphærio segmentum AEFC; in quo sit Sector secundus AEDFC, & conus EDF. Dico quod Sector secundus AEDFC, sit ad conum EDF, sicut superficies Sphærica Hemisphærij ABC, ad circulum circa EF basim Coni EDF; vel sicut quadratum ex AB ad quadratum ex EI.

Constituatur igitur circa axem segmenti ID conus rectangulus GDH; & quoniam demonstratum est quod Conus EDF, vnà cum cono rectangulo GDH, æquales sint dimidio sectoris AEDFC; erunt bis sumpti æquales toti sectori AEDFC: Cum igitur 10. huius

EI, ſit radius baſis Coni EDF, GI vero radius baſis Coni rectanguli GDH, cui æqualis eſt linea ID; cum etiam quadratum ED æquale ſit duobus quadratis EI & ID, hoc eſt EI & IG; erit etiam Circulus ex radio ED æqualis duobus circulis ex radijs EI, & IG. Conus igitur cuius baſis eſt ex radio ED, altitudo vero ID, æqualis eſt duobus Conis, ſcilicet EDF ſegmenti, & Cono rectangulo GDH, hoc eſt dimidio ſectoris ſecundi. Sed cum quadratum ex AB ſit duplum quadrati ex AD vel ED, ſi ex illo vt radio factus fuerit Circulus pro baſi Coni, & conſtituatur in eadem altitudine (ſcilicet ID) Conus, erit ille duplus coni ex radio ED, & proinde æqualis Sectori ſecundo AEDFC. Sed Coni quorum eadem altitudo, ſunt inter ſe ſicut baſes, baſes vero cum ſint circuli, ſicut quadrata radiorum; Eſt igitur ſicut quadratum AB, ad quadratum EI, ſic ſector ſecundus AEDFC, ad conum EDF. Circulus autem ex radio AB, æqualis eſt ſuperficiei ſphæricæ hemiſphærij ABC; & circulus ex radio EI, eſt baſis coni. Igitur ſicut ſuperficies

10. huius.

11. duodecimi.

ſphæ-

ſphærica hemiſphærij ABC, ad baſim coni EDF in ſegmento; ita ſector ſecundus ad conum ſegmenti. Quod erat propoſitum demonſtrare.

PROPOSITIO XXI.

Inuenire ſegmentum in Hemiſphærio, in quo Sector ſecundus ſit ad Conum ſegmenti in quâcunque datâ ratione poſſibili: Oportet autem quod ſit in maiori quam duplâ ratione.

ESto Hemiſphærium ABC, centrum D, & axis BD, & Cylindrus EF æqualis Hemiſphærio ABC, & eiuſdem altitudinis; & data ſit proportio GH, ad IL, in quâ conſtituendus ſit ſector ſecundus in ſegmento, ad conum eiuſdem ſegmenti: GH autem debet eſſe maior quam dupla IL. Secetur iam GH in puncto K, vt ſit KH, tertia pars ipſius GH:

& inter KH, & IL, cadat linea M media proportionalis, & fiat sicut KH ad M, ita DF radius basis Cylindri aequalis Hemisphaerio ad DN; & super basi ex radio DN, fiat Cylindrus inscriptus Hemisphaerio qui sit ON, ex cuius fabricâ etiam factum sit segmentum AOQC, in quo fiat sector secundus AODQC, & conus ODQ: Dico quod sector secundus AODQC se habet ad conum ODQ, sicut linea GH ad lineam IL: Producatur itaque planum OQ, usque dum secet Cylindrum EF, in P, & R; & sit conus PDR.

Cum igitur factum sit sicut KH ad M, ita DF ad DN; erit conus PDR ad conum ODQ, sicut KH ad IL, hoc est in duplicatâ ratione KH, ad M; Cylindrus autem PF, est triplus coni PDR; quare etiam est ad conum ODQ, sicut tripla KH, hoc est GH ad IL; Cylindrus vero PF, est aequalis sectori secundo AODQC. Igitur sector secundus ad conum ODQ in eodem segmento, est sicut GH ad IL. quod faciendum erat.

9, huius.

SCHO-

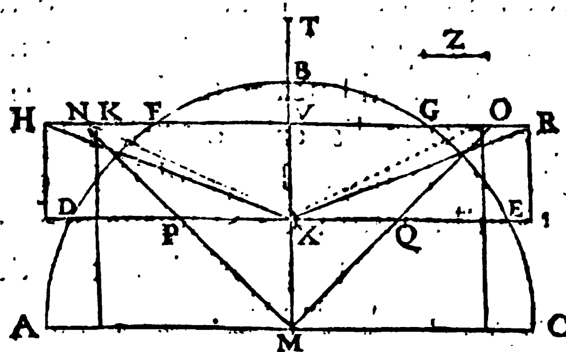
SCHOLIVM.

Notandum autem est quod I L possit esse maior quam K H: & forsan ideo dicat aliquis quod media proportionalis M, poterit excedere semidiametrum D C, quare punctum N cadere potest extra hemisphærium: quod fieri non posse sic ostendo. Supponatur I L, æqualis dimidiæ G H, (propositio tamen requirit vt minor sit quam dimidia) & erit tunc I L in ratione sesquialterâ ad lineam K H, & linea M, quæ est media proportionalis, erit potentiâ sesquialtera ipsius K H; sed ita se habet D C, ad D F; quare cadet punctum N in punctum C: Si igitur minor sit I L, quam dimidia G H, vt propositio exigit, cadet necessario punctum N, in linea D C.

PROPOSITIO XXII.

Si Hemisphærium sectum fuerit duobus planis ad basim hemisphærij parallelis, segmentum interceptum inter ea plana habet eam proportionem ad partem Cylindri æqualis Hemisphęrio inter eadem plana interceptam, quam excessus maximæ trium proportionalium (quarum media est axis Hemisphærij, minor vero pars axis intercepta inter basim &

planum ſuperius) ter ſumptæ, ſupra tres proportionales (quarum maior eſt eadem priorum minor, ſcilicet à centro ad planum ſuperius, media à centro ad planum inferius, & tertia minor ad eas, habet ad maximam priorum bis ſumptam.



ESto ſiquidem Hemiſphærium ABC; in quo ſint duo plana DE & FG ſecantia Hemiſphærium, & ad baſim AC parallela, quæ faciant in Hemiſphærio ſegmentum interceptum DFGE; & productis planis, facti ſint Cylindri circa eundem axem ſegmenti VX, ſcilicet HI, ſuper baſi æquali baſi Hemiſphærij, & KL, ſuper baſi ſubſeſquialtera ad baſim hemiſphærij, qui pars eſt Cylindri æqualis Hemiſphærio; & à centro M baſis Hemiſphærij ductis lineis MN, & MO, conſtituentibus in centro M conum rectangulum NMO, & ſecantem planum DE, in P, & Q; vnde inter plana eadem parallela factus eſt etiam trun-

cus

tis coni NPQO: Ductus iam axis MB, sectusque planis per puncta X, & V, producatur, & fiat sicut VM ad BM, ita BM ad TM; & iterum sicut VM ad XM, ita XM ad lineam Z; Dico quod erit sicut excessus triplæ TM supra VM, XM, & Z, ad duplam TM, ita segmentum DFGE, ad Cylindrum KL, idest ad sectorem, cuius superficies sphærica est eadem quæ superficies segmenti DFGE: Ducantur enim lineæ NX, OX, constituentes conum NXO. Cum igitur Truncus NPQO, sit ad conum NXO, sicut tres proportionales in ratione NV ad PX, ad maximam trium; NV vero æqualis sit VM, PX vero XM, erit truncus NPQO, ad conum NXO, sicut aggregatum ex VM, XM & Z, ad VM; Cum autem HV sit ad NV, sicut BM ad VM, (sunt enim æquales HV, & BM, NV, & VM;) Conus HXR erit ad conum NXO, in duplicatâ ratione BM ad VM, hoc est sicut TM ad VM; & ideo excessus Cylindri HI, supra segmentum DFGE (æqualis est enim dictus excessus trunco coni NPQO) est ad conum HXR, sicut VM, XM, & Z, ad TM. Sed cum conus HXR, sit æqualis dimidio Cylindri KL; erit excessus prædictus ad Cylindrum KL, sicut VM, XM, & Z, ad duplam TM. Sed truncus coni, cum sit æqualis excessui Cylindri HI supra segmentum DFGE, erit vnà cum segmento DFGE, æqualis Cylindro HI; & ideo triplus coni HXR: Excessus igitur tripli coni HXR supra truncum coni, hoc est segmentum DFGE, est ad duplum coni HXR, hoc est Cylindrum KL, sicut excessus triplæ TM, supra

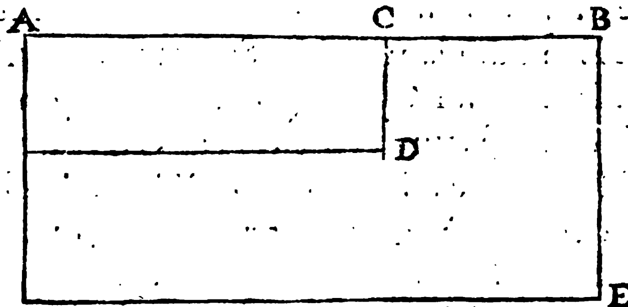
9. huius.
16. huius
7. huius.
ex 17. huius.

VM,

VM, XM, & Z. ad duplam TM: Sed linea TM est maxima trium proportionalium, quarum prima est linea intercepta inter centrum & planum superius, & secunda est axis hemisphærij; tres vero reliquæ proportionales scilicet VM, XM, & Z, quarum prima est etiam minor priorum, linea videlicet a centro ad planum superius, secunda XM, a centro ad planum inferius, & Z ad eas tertia proportionalis. Linea vero TM ter sumpta, designat truncum coni vna cum portione DFGE; tres autem reliquæ proportionales designant truncum coni; & TM dupla designat Cylindrum KL, cuius basis est subsesquialtera ad basim Hemisphærij. Si igitur Hemisphærium &c.

COROLLARIVM.

Ex hoc elicitur proportio Segmenti intermedij DFGE, ad hemisphærium ABC, quæ componitur ex propottione segmenti DFGE ad Cylindrum KL, & Cylindri KL ad Hemisphærium; Cylindrus vero KL se habet ad Hemisphærium sicut axis eius VX, ad axem hemisphærij BM. Fiat igitur linea AB,

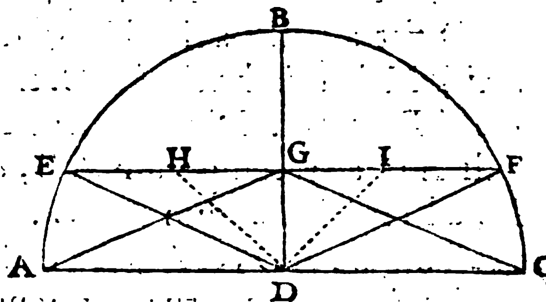


æqualis duplæ TM; & sit AC æqualis excessui quo tripla TM excedit tres proportionales VM, XM, & Z; deinde CD fiat æqualis axi VX segmenti DFGE, & BE, axi BM hemisphærij ABC: ex his fiant duo rectangula AD & AE: Dico eandem esse rationem rectanguli AD ad rectangulum AE, quæ segmenti DFGE ad Hemisphærium ABC. Componuntur enim rectangula AD, & AE, ex eisdem proportionibus quibus componuntur segmentum, & Hemisphærium, & ideo in eadem ratione sunt.

PROPOSITIO XXIII.

Segmentum Hemisphærij inter basim, & planum parallelum basi interceptum, æquale est tribus conis eiusdem cum segmento altitudinis quorum duo sunt ex basi maiori reliquus vero ex basi minori.

SEcetur vtcunque hemisphærium ABC, plano EF, basi AC parallelo, & in segmento fiat conus EDF, & iterum super basi AC, constituatur alius AGC, circa eundem eorum axem communem GD, qui etiam axis est segmenti AEFC. Dico quod conus AGC bis, vnà cum cono EDF simul sumpti, æquales sint segmento AEFC.



Cum enim demonſtratum ſit quod conus E D F, vna cum cono rectangulo (qui ſit H D I) æquales ſint dimidio ſectoris ſecundi; demonſtratum etiam ſit quod conus ex radio E D, vel quod idem eſt ex radio A D, æqualis ſit duobus conis eiuſdem altitudinis, videlicet ex radijs E G, & H G, & ideo æqualis dimidio ſectoris ſecundi inter eadem parallela plana: eſt igitur conus A G C, ex baſe maiori ſegmenti, æqualis dimidio ſectoris ſecundi A E D F C; Conus igitur A G C bis ſumptus, vnà cum cono ſegmenti E D F ſimul, æqualis eſt toti ſegmento A E F C: Quod erat propoſitum.

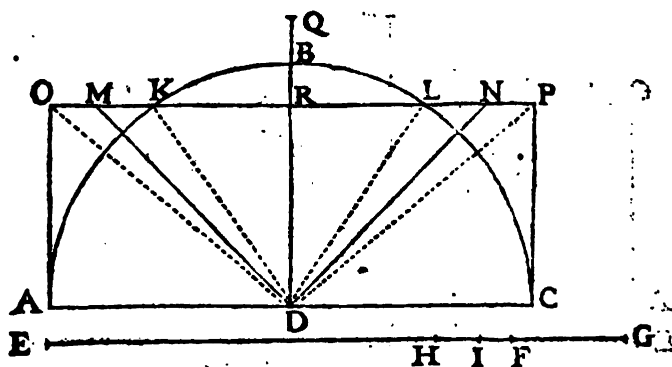
per 10. huius.

per 20. huius.

PROPOSITIO XXIV.

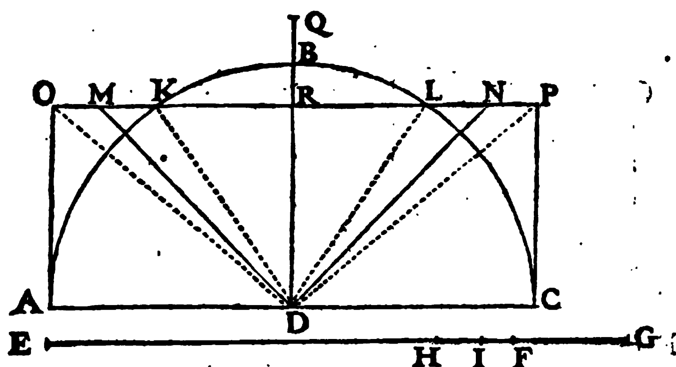
Segmentum in Hemiſphærio conſtituere, quod habeat ad conum rectangulum eiuſdem altitudinis proportionem datam. Proportio autem debet eſſe maior quam dupla.

Sit



Sit Hemisphærium A B C, centrum D, axis B D, & sit ratio data E F ad F G, quam habere debeat segmentum ad conum rectangulum eiusdem altitudinis. Cum autem F G minor sit quam tertia pars lineæ totius E G, diuidatur ita in puncto H, vt sit G H, tertia pars E G, & inter F G, & H G, cadat media proportionalis I G: Similiter etiam diuidatur axis Hemisphærij B D in R, vt sit sicut I G ad F G, ita B D ad R D; & per punctum R, agatur parallelum planum ad basim A C, faciens segmentum in Hemisphærio A K L C. Fiat etiam inter eadem plana, (producta si opus sit) conus rectangulus M D N circa eundem axem R D, & Cylindrus O C, super basi Hemisphærij A C. Fiat etiam sicut R D ad B D, ita B D ad Q D, & constitutis conis O D P, & K D L; Dico, segmentum A K L C, ad conum rectangulum M D N, habere rationem, quam habet linea E F ad lineam F G.

Cum enim conus O D P ad conum rectangulum M D N sit in duplicatâ ratione lineæ O R ad lineam M R, vel quod idem est axis B D ad R D; est igitur



Conus ODP ad conum MDN, sicut linea QD ad RD; Sed Cylindrus OC est triplus coni ODP, & excessus Cylindri OP supra segmentum AKLC, est
5. huius. aequalis cono rectangulo MDN; Cylindrus igitur OC ad excessum suum supra segmentum AKLC, est sicut tripla QD ad RD; Hic vero Cylindrus OC, ad sectorem secundum AKDLC, est sicut tripla QD
23. huius. ad duplam QD; demonstratum est enim quod Sector secundus aequalis sit duplo coni ODP; Sector igitur secundus est ad excessum Cylindri OC supra segmentum, sicut dupla QD ad RD. Sed conus ODP, cum sit dimidium Sectoris secundi AKDLC, aequalis est duobus conis KDL, & MDN. Sector igitur secundus vna cum cono KDL hoc est segmentum, est ad conum rectangulum MDN, vel ad excessum Cylindri supra segmentum notatum literis AOKLPC, sicut dupla QD, vnà cum parte QR, est ad RD: pars igitur QR signat conum segmenti KDL. Sed factae sunt QD, BD & RD, in eadem ratione sicut HG IG, & FG; est igitur sicut QD ad RD, ita HG ad FG;

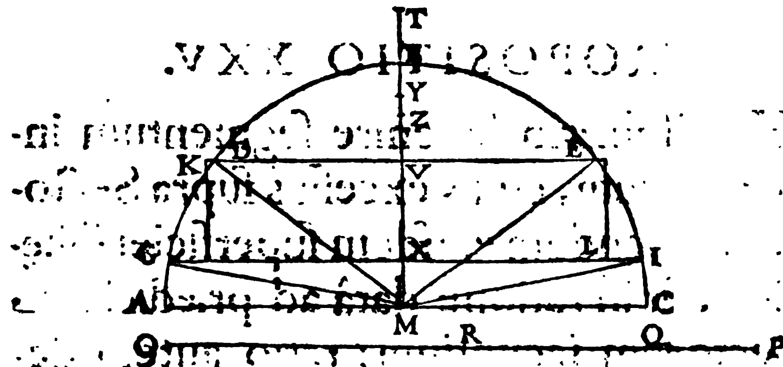
& antecedentium tripla, hoc est, sicut triplum QD ad RD, ita EG ad FG, & diuidendo sicut duplum QD cum QR ad RD, ita EF ad FG, igitur duplum QD scilicet duo coni ODP, cum QR cono segmenti KDL, hoc est segmentum AKLC ad RD, conum rectangulum MDN, se habet sicut linea EF ad FG, Factum est igitur in Hemisphærio segmentum, ad conum rectangulum eiusdem altitudinis in ratione datâ EF ad FG, quod erat propositum.

PROPOSITIO XXV.

In Hemisphærio inuenire segmentum intermedium, cuius excessus supra Sectorem secundum eiusdem superficiei sphęricæ, sit in ratione datâ ad prædictum Sectorem secundum: ratio autem debet esse minor quam subdupla.

Sit proportio data OP ad QP, quam habere debeat Sector secundus ad excessum quo a segmento excedatur; QP ergo minor debet esse quam dimidia OP. Super plano igitur AC, a puncto M, erigatur perpendicularis MT, & fiat sicut dimidia OP, scilicet RP ad PQ, ita MT ad TY: Sumpto etiam in linea MY, puncto V vtcunque (dummodo MV maior sit tertiâ parte lineæ MY) fiat MB media proportionalis inter MV, & MT, & facto radio MB, fiat Hemisphærium ABC: Iterum datâ trium propor-

15.huius. tionalium prima MV, & aggregato reliquarum VY, inueniatur punctum Z, vt sint MV, VZ, & ZY, continue proportionales. Iam a centro M fiat MX æqualis VZ, & per X & V puncta, agantur plana basi AC parallela secantia hemisphærium ABC, in punctis G, D, E, I, vnde fit segmentum intermedium GDEI; ducantur etiam ad centrum M lineæ GM, DM, EM, & IM, ex quibus intelligatur designatus



Sector secundus GDMEI; fiat etiam Cylindrus KL, super basi subsesquialtera ad basim Hemisphærij, circa eundem axem & inter eadem plana parallela interceptus.

Quoniam igitur YM est aggregatum trium proportionalium, scilicet VM primæ, XM vel ZY secundæ, inter centrum M & duo plana parallela basi, & YZ ad eas tertiæ; sunt etiam & aliæ tres, quarum VM prima, BM axis hemisphærij secunda, & TM ad eas per 42.huius. tertia; erit sicut excessus triplæ TM supra YM, ad duplam TM, ita segmentum GDEI, ad Cylindrum KL, hoc est ad Sectorem secundum GDMEI. Sed

si ex

si ex tripla TM subtracta fuerit YM, reliqua erit dupla TM vna cum parte TY. Est igitur proportio segmenti ad Sectorem, sicut duplæ TM vna cum parte TY ad duplam TM. Excessus itaque est pars TY, quæ ad duplam TM habet eandem rationem quam habet QP ad PO; & conuertendo erit sicut Sector secundus ad excessum quo segmentum excedit eum, ita OP ad PQ, quod faciendum erat.

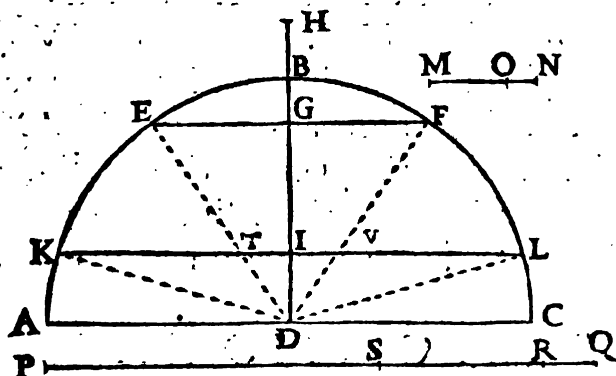
Quod autem oporteat MV esse maiorem quam tertia pars lineæ MY, sequitur ex eo quod MV debeat esse maxima trium proportionalium, quarum aggregatum est linea MY. Cum enim MV sit linea a centro ad planum superius, MX vero quæ a centro ad planum inferius, necessario minor erit MX quam MV; & ideo maior erit quam tertia pars lineæ MY, cum tota linea MY ex tribus lineis inæqualibus, & proportionalibus facta sit, quarum MV maxima.

PROPOSITIO XXVI.

Si Hemisphærium sectum fuerit plano ad basim parallelo, ita vt totus axis non sit potentiâ triplus partis inferioris, sed vel maior vel minor, iterum secare Hemisphærium plano parallelo, ita vt segmentum interceptum sit æquale Sectori secundo eiusdem cum segmento superficiei sphæricæ.

Sit

SIt Hemiſphærium ABC, cuius centrum D, axis BD, ſectus plano per punctum G ad baſim parallelo, faciente ſectionem EF, & non ſit quadratum ex BD, triplum quadrati ex GD, ſed vel maius vel minus. Sit vero iam minus; & fiat ſicut GD ad BD, ita BD ad HD. Inuentæ itaque lineæ HG, quæ eſt exceſſus quo linea HD ſuperat lineam GD, fiat æqualis recta MN, & diuidatur ſic in puncto O, vt ſit ſicut GD ad MO, ita MO ad ON; & in axe factâ ID æquali MO, per I ducatur aliud planum baſi AC



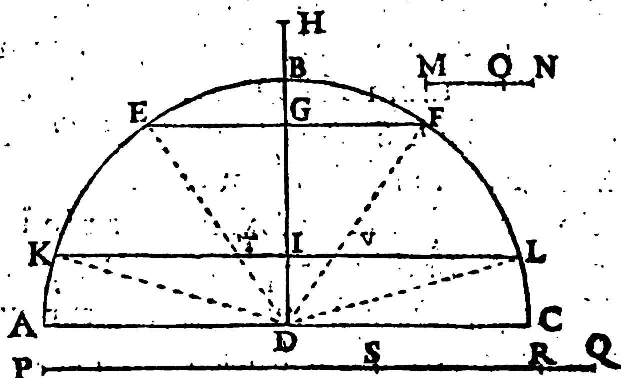
parallelum, includens ſegmentum KEFL, ductiſque lineis ad centrum KD, ED, FD, & LD, Dico quod ſegmentum KEFL eſt æquale Sectori ſecundo KEDFL. Cum enim demonſtratum ſit, quod ſegmentum intermedium KEFL ſe habeat ad Sectorem ſecundum KEDFL, ſicut exceſſus triplæ HD ſupra tres proportionales, quàrum GD prima, & ID ſecunda, hoc eſt ſupra aggregatum ex GD & MN, (ſic enim per conſtructionem factum erat) ad duplam HD: exceſſus vero triplæ HD ſupra tres illas propor-

tionales (hoc est ipsam HD) sit dupla HD, quæ se habet ad eandem duplam HD, sicut segmentum KEFL ad Sectorem secundum KEDFL: æquale est igitur segmentum KEFL Sectori secundo eiusdem superficiei sphæricæ, quod faciendum erat.

Si autem Hemisphærium sectum fuerit in I, vt quadratum axis BD sit maius triplo quadrati partis ID, plano KL per punctum I ducto, inuenietur punctum G hoc modo: Sit vtcunque linea PQ, quæ diuidatur sic in puncto R, vt sit sicut quadratum BD ad quadratum ID, ita linea PQ ad QR: data iam RQ prima, & PR aggregato secundæ ac tertiæ, diuidatur ita PR in puncto S, vt sint PS, SR, RQ, in continua ratione.

Quoniam enim rectangulum ex HD, GD, æquale est quadrato BD; rectangulo etiam ex GD, ON, æquale est quadratum ex ID: rectangula autem, cum habeant latus commune GD, sint inter se sicut reliqua latera, videlicet HD & ON; quadrata igitur ex BD, & ID, cum sint predictis rectangulis æqualia, sunt inter se in eadem ratione; scilicet sicut linea HD, ad lineam ON: Iterum cum linea HD, composita sit ex lineis HG, & GD, lineæ vero HG, per constructionem æqualis sit MN, composita igitur ex GD & MN, æqualis erit lineæ HD; sed ratio PQ ad QR est quadrati BD ad quadratum ID; hoc est lineæ HD, ad lineam ON; erit itaque & composita ex GD & MN, ad ON, sicut PQ ad QR: Cum igitur linea HD, vel composita ex GD, & MN, sit aggregatum trium proportionalium; sit etiam linea PQ

aggre-



aggregatũ trium proportionalium; & habeant ad minores earum eandem rationem, ſcilicet linea PQ ad QR, eandem rationem, quam habet compoſita ex DG & MN, ad ON; Sequitur quod diuiſæ ſingulæ proportionalium viciſſim ſumptæ, eandem rationem habebunt; ſcilicet quod prima priorum ad ſecundam earum, habeat eandem rationem quam habet poſteriorum prima, ad ſecundam poſteriorum, & ſic in reliquis; Vnde ſequitur quod ſicut QR ad RS, ita ON ad MO, vel ID; & ſicut RS ad SP, ita DI ad DG. Data autem eſt linea DI, & ratio RS ad SP; & ideo data eſt linea DG, & punctum G, per quod tranſire debet planum EF.

Per 17. 5. Eucl.

Ducatur itaque planum EF per punctũ G, ad baſim AC parallelum, & erit factum ſegmentum KEFL, quod iam demonſtrauimus eſſe æquale Sectori ſecundo KEDFL, quod faciendum erat.

CORO-

COROLLARIVM.

Ex demonſtratis apparet quod conus EDF æqualis ſit cono KDL. Signetur enim conus EDF, in interſectione cum plano KL, literis T, V; cum igitur Sector ſecundus KEDFL æqualis ſit ſegmento KEFL; erit truncus EFVT æqualis parti KTDVL Sectoris ſecundi, quibus ſi addatur conus vel coni pars communis TDV, erit totus conus EDF, cono KDL æqualis. I.

Ex quo etiam ſequitur, quod ſi detur vtcunque conus in Hemiſphærio, qui non ſit maximus, alius ei æqualis in eodem Hemiſphærio conſtitui poteſt. II.

Apparet etiam ratio, quare ſi axis ſectus fuerit in ratione triplâ quadrati totius ad quadratum partis inferioris, non poſſit iterum ſecari, vt ſit ſegmentum æquale Sectori ſecundo eiuſdem ſuperficiei ſphæricæ; quoniam in illo caſu conus ſegmenti eſt maximus conorum inſcriptibilium in Hemiſphærio, vnde ei non poteſt alius conſtitui æqualis: Manifeſtum eſt enim quod neceſſario ſint duo coni æquales, quãdo ſegmentum eſt æquale Sectori ſecundo eiuſdem ſuperficiei ſphæricæ; vti iam probatum eſt. III.

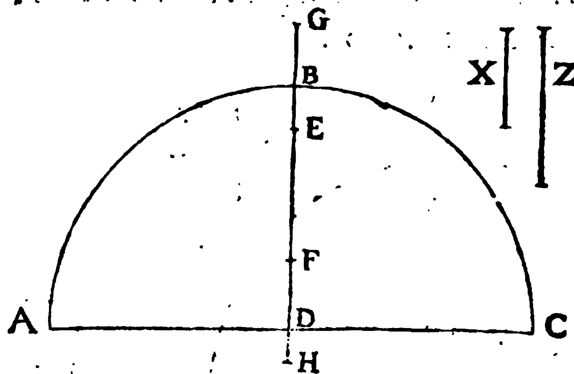
Huiuſmodi etiam ſegmento intermedio, cui Sector ſecundus eiuſdem ſuperficiei ſphæricæ æqualis eſt, Sector etiam primus ei æqualis datur: ductis enim a polo B lineis BK & BE, ſi ex quadrato BK ſubducatur quadratum BE, reliqui quadrati latus erit radius Sectoris primi qui dicto ſegmento æqualis erit. IV.

V. Obſeruandum etiam eſt quod in triangulis K I D, & E G D, ex quorum reuolutione fiunt duo coni æquales E D F, & K D L, quadrata laterum K I & I D, ſimul ſumpta, æqualia ſunt quadratis duorum laterum E G & G D, latus verò G D ad latus I D, eſt in duplicatâ ratione lateris K I ad latus E G, quod manifeſtum eſt ex eo quod coni inter ſe ſint æquales. Si igitur propoſitum fuerit, dato triangulo rectangulo, inuenire aliud cuius laterum quadrata circa angulum rectum ſint ſimul ſumpta æqualia quadratis duorum laterum trianguli dati circa angulum rectum; & quod ratio quam habet vnum latus circa angulum rectum prioris trianguli ad vnum ſimile latus poſterioris, dupla ſit rationis quam habet reliquum poſterioris ad reliquum prioris trianguli circa eundem angulum rectum: Hoc efficietur (ſicut apparet ex huius propoſitionis demonſtratione) ex æqualitate conorum in Hemiſphærio inſcriptorum.

PROPOSITIO XXVII.

Segmentum intermedium in datâ ratione ad Hemiſphærium exhibere.

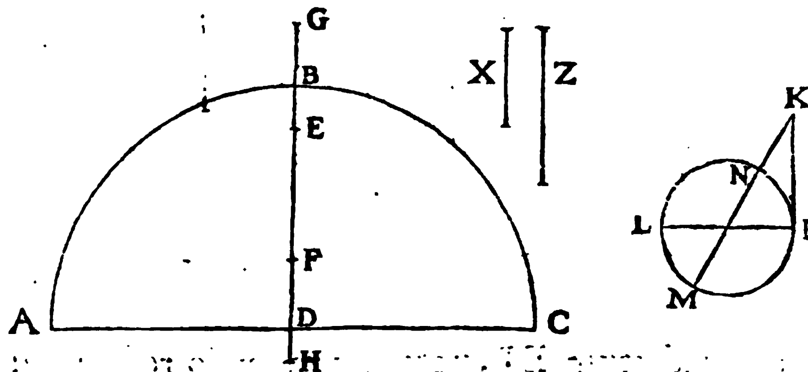
SIt ratio data quam habet X ad Z, & ſupponatur factum, & ſit E F axis ſegmenti intermedij æqualis Sectori ſecundo eiuſdem ſuperficiei ſphæricæ, in ratione ad B D axẽ Hemiſphærij, ſicut linea X ad lineã Z, & ſint continue proportionales E D, B D & G D, & iterum E D, F D & D H: & quoniã nota eſt proportio quadrati



BD ad quadratum EF, nota eſt proportio rectanguli GDE ad quadratum EF; rectangulum autem ex GD in ED, æquale eſt quadrato ED, vnà cum rectangulo ex GE in ED, hoc eſt ex FH in ED, cùm FH & GE ſint æquales; rectangulum autem ex FH in ED, æquale eſt duobus rectangulis; ſcilicet ex ED in DH & ex ED in DF. Sed rectangulum ex ED, FD, æquale eſt rectangulo EFD vnà cum quadrato FD, & rectangulum EDH æquale eſt eidem quadrato FD; Eſt igitur rectangulum ex GE in ED, æquale rectangulo ex EF, FD, vnà cum duobus quadratis ex FD. Quadratum vero ex ED æquale eſt quadrato ex EF & quadrato ex FD, cum duobus rectangulis EFD; Quadratum igitur ex BD, æquale eſt quadrato ex EF, vnà cum tribus rectangulis ex EF, & FD, & tribus quadratis ex FD. Tertia pars igitur exceſſus quadrati BD ſupra quadratum EF, eſt rectangulum ex EF, FD, vnà cum quadrato FD, hoc eſt rectangulum ex ED, FD. Sed datus eſt exceſſus quadrati BD ſupra quadratum EF (data eſt enim ratio EF ad BD, ſcili-

Per conſtructioné 28. huius.

cet X ad Z:) igitur & tertia pars eius data est. Componatur autem hoc modo.



Ex quadrato BD subtrahatur quadratum EF, cuius residui tertiæ parti æquale sit quadratum ex IK; huic ad angulos rectos applicetur recta LI æqualis lineæ EF datæ; & super lineam LI describatur Circulus LNIM; Iam a puncto K extremitatis lineæ IK, ducatur recta KNM per centrum circuli ad peripheriam M; secans circulum in N; Et quoniam rectangulum ex MK in KN æquale est quadrato ex KI (tangit enim KI circulum LNIM:) quadratum vero ex KI per constructionem æquale est tertiæ parti excessûs quadrati BD, supra quadratum ex EF; cui etiam demonstratum est rectangulum EDF esse æquale; æquale igitur est rectangulum MKN, rectangulo EDF. Sed facta est linea LI, æqualis lineæ EF; deductâ igitur LI vel MN ex MK, & EF ex FD, reliquæ NK & FD, æquales erunt; igitur tota MK, toti ED æqualis erit. Data ergo sunt puncta F, E, in axe, & linea FE, cui in ratione X ad Z factus sit axis.

4. huius.

Quoniam igitur segmentum intermedium inter

plana per puncta E & F æquale est sectori secundo eiusdem superficiei sphæricæ, (facta est enim G E æqualis F H) erit segmentum intermedium ad Hemisphærium A B C, in eâdem ratione quâ axis E F ad axim B D: & ideo segmentum &c. 26. huius. per Corol. 9. huius secundā partem.

COROLLARIVM.

I. Hoc Problema, licet non sit illud ab Archimede propositum libro secundo de sphæra & Cylindro prop. 4. attamen est sectio sphæræ in ratione data, & a nullo quod sciam Geometra hactenus demonstrata: ex hoc enim, Segmentum intermedium ad Hemisphærium in quâcunq. ratione constitui potest; & ad sphæram in ratione minori quam subduplâ vel in quâcunque ratione datâ ad sphæram duobus segmentis intermedijs, vti ex demonstratis facile colligitur.

II. Hinc etiam consequitur, quod si Cylindrus constituatur super basi hemisphærij & in eo & eadem altitudine inscriptus fuerit conus rectangulus inuerse positus, & si per E & F ducta fuerint plana parallela secantia Cylindrum & conum rectangulum, quod conus ille rectangulus secabitur sicut hemisphærium, vt sit pars eius intermedia inter plana parallela intercepta ad totum conum rectangulum, sicut pars axis E F ad totum axem B D.

Quoniam enim pars illa Cylindri intercepta est ad totum Cylindrum, sicut pars axis E F ad totum axem; & pars Hemisphærij, hoc est pars excessûs Cylindri supra conum rectangulum inter eadem plana est ad to-

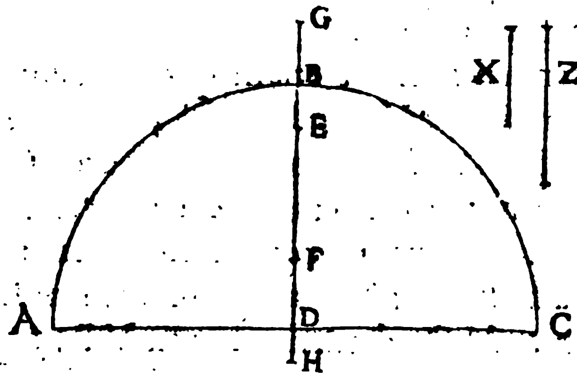
tum

cum excessum in eâdem ratione, scilicet E F ad B D; necessario sequitur, quod erit etiam truncus coni intermedius ad totum conum in eâdem ratione: si enim sit sicut totum ad totum, ita ablatum ad ablatum, erit etiam ita reliquum ad reliquum.

PROPOSITIO XXVIII.

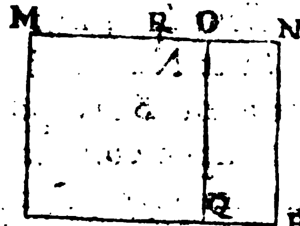
Datâ proportione partium axis interceptarum inter axem segmenti intermedij & centrum Hemisphærij & eundem axem & polum eius, inuenire segmentum æquale Sectori secundo eiusdem superperficiei sphæricæ.

REpetito diagrammate superiore, sit data proportio partis F D ad partem B E, eadem quæ lineæ K ad lineam I, & quoniam demonstratum est in superiore quod rectangulum ex G D in E D, hoc est quadratum B D, æquale sit quadrato E D, vnà cum rectangulo ex E D in D F & quadrato D F; est autem quadratum ex B D, æquale rectangulo ex E D in B E bis, cum quadrato B E & quadrato E D; dempto itaque ex vtroque communi quadrato E D, remanebit rectangulum ex E D in D F, vnà cum quadrato ex D F, æquale rectangulo ex E D in B E bis, cum quadrato B E: quanto ergo quadratum D F excedit quadratum B E, tanto duo rectangula ex E D in B E excedunt rectangulum ex E D in D F. Sed quoniam



quantitas linearum BE & FD ignota est, nota autem est proportio earum; componatur sic.

Ex quadrato lineæ K subducatur quadratum lineæ I, & reliqui quadrati latus sit L: deinde fiat linea MN æqualis duplæ I, ex quâ, deductâ parte MO æquali lineæ K, (maior enim est dupla I quam linea K vt infra demonstrabitur) reliquæ ON applicetur latus faciens rectangulum OP æquale quadrato ex L, & compleatur totum rectangulum MP.



Quoniã igitur MN æqualis est duplæ lineæ I, ex quâ deducta est linea MO æqualis lineæ K, & excessui ON applicata est linea faciens rectangulum OP æquale excessui quadrati K supra quadratum I; vnde etiam rectangulum MP, excedit rectangulum MQ eodem excessu quo quadratum K excedit quadratum I, erit sicut rectangulum MQ ad rectangulum MP, ita in Hemis-

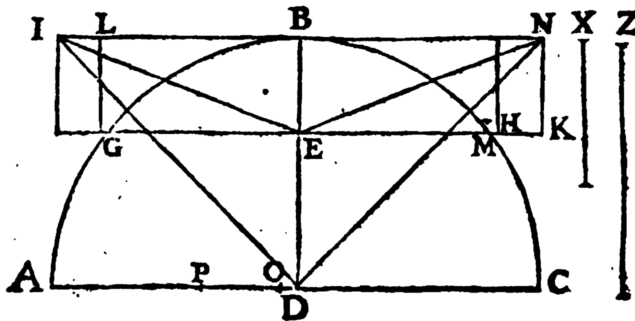
phærio

phærio rectangulum ex ED in DF, ad rectangulum ex ED in duplam BE.

Sed ostendendum est etiam quod eadem sit ratio NP ad dimidiam MN, scilicet ad RN, quæ in Hemisphærio FD ad EB; quod sic ostendo. Quoniam enim factæ sunt in eâdem ratione FD ad EB, & MO ad MR, erunt & quadrata earum in eâdem ratione, scilicet quadratum ex FD ad quadratum ex EB, sicut quadratum ex MO ad quadratum ex MR, & per conuersionem rationis eadem etiam erit ratio quadratorum ad differentias eorum; quare & laterum, scilicet lateris FD ad latus, quod potest excessum quadrati FD supra quadratum EB, sicut latus MO ad latus quod potest excessum quadrati MO supra quadratum MR, hoc est ad lineam L. Sit igitur linea S, quæ possit excessum quadrati FD supra quadratum EB, quare linea S erit media proportionalis inter ED & excessum quo dupla EB superat FD. Linea igitur S est ad lineam ED, sicut L ad lineam NP; & S ad lineam BE, sicut L ad lineam MR, ex æquali erit ED ad BE, sicut NP ad MR. Sed ED & BE simul conficiunt axem BD; oportet igitur quod NP & MR simul sumptæ conficiant etiam lineam in eâdem ratione sectam sicut BD axis in E. Igitur datum erit punctum in axe, per quod transire debet planum basi parallelum, quod faciendum erat: reliquum punctum intersectionis in axe per 25. inuenietur.

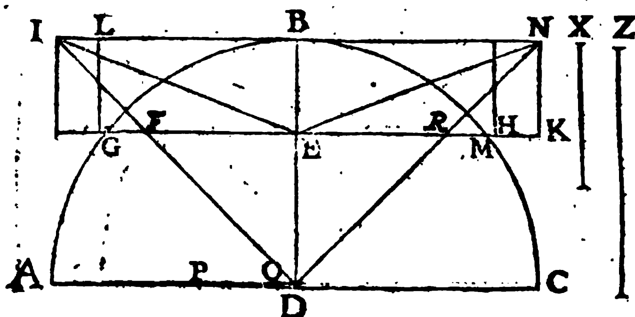
PROPOSITIO XXIX.

Portionem Hemiſphærij ad Cylindrum, eiuſdem altitudinis, cuius baſis eſt ſubſeſquialtera ad baſim Hemiſphærij, in data ratione minore exibere.



SIt ratio data X ad Z. Oportet autem quod X ſit minor, cum portio hemiſphærij ſemper minor ſit quàm pars Cylindri æqualis Hemiſphærio circa eundem axem conſtituta. Sit etiam Hemiſphærium ABC, centrum D, axis BD. Diuidatur iam diameter baſis AC ita in O, vt ſit OC ad AC, ſicut X ad Z; fiatque BD prima, & AO aggregatum ſecundæ ac tertiæ, quæ diuidatur ita in P, vt ſit BD ad AP, ſicut AP ad PO; & a puncto D, in axe facta DE æquali AP, per E punctum agatur planum baſi AC parallelum, ſecans Hemiſphærium in G & M facienſque portionem GBM: ducatur etiam per polum B, aliud pla- 15. huius.

num parallelum, & inter dicta plana, & circa axem BE, constituantur Cylindrus IK super basi æquali basi Hemisphærij, & Cylindrus LH super basi subsesquialterâ ad basim Hemisphærij. Dico portionem GBM, se habere ad Cylindrum LH eiusdem altitudinis, & super basi subsesquialterâ ad basim hemisphærij, sicut X, ad Z. Sit enim conus rectangulus IDN, & conus in Cylindro IEN.



Et quoniam truncus coni IFRN se habet ad conum IEN, sicut ad maximam trium tres proportionales in ratione IB, ad FE: Sunt autem lineæ BD, AP, & PO, in eadem ratione. Truncus igitur coni se habet ad conum IEN sicut tres illæ proportionales hoc est BD & AO ad BD. Sed idem truncus æqualis est excessui, quo Cylindrus IK superat portionem GBH. Portio igitur GBH est excessus Cylindri IK supra truncum Coni. Igitur se habet ad Conum IEN, sicut excessus triplæ BD supra BD, AP, & PO, ad BD, & ad Cylindrum IK sicut ad triplam BD. Sed Cylindrus IK est sesquialter Cylindri LH, se habet

16. huius.

Per 7. huius.

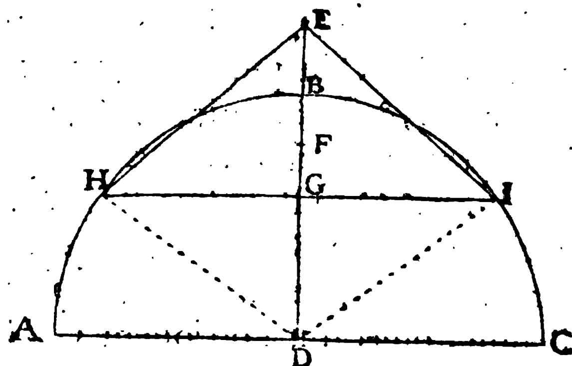
igi-

igitur ad Cylindrum L H, ſicut ad duplam B D: Exceſſus vero triplæ B D, ſupra B D, A P, & P O, idem eſt ac exceſſus duplæ B D, hoc eſt diametri A C ſupra A O, ſed exceſſus A C, ſupra A O, eſt linea O C; Portio itaque G B M ſe habet ad Cylindrum L H, ſicut O C ad A C, hoc eſt ſicut exceſſus trium proportionalium in ratione B D ad E D, vel I B ad K E; ſunt enim æquales duplæ maioris B D. Diuidatur itaque diameter baſis Hemiſphærij A C in puncto O, vt ſit O C ad A C, ſicut X ad Z; & factâ dimidiâ A C (hoc eſt B D) prima trium proportionalium, & A O aggrato reliquarum, & diuisâ A O in P, vt ſint B D, A P, P O in continuâ ratione, in axe B D fiat E D æqualis ſecundę proportionali A P, & ſi per E, ducatur planum baſi A C parallelum, diſſecabit Portionem G B H quæſitam, quæ ad Cylindrum L M, eiuſdem altitudinis & cõſiſtentem ſupra baſim ſubſeſquialteram ad baſim hemiſphærij, habebit proportionem X ad Z datam. 15. huius.

PROPOSITIO XXX.

Portio ſe habet ad conum ſuum ſicut exceſſus trium proportionalium ſupra minorem ter ad duplum exceſſum mediæ ſupra eandem minorem; & portio ſe habet ad Hemiſphærium, ſicut rectangulum ex terminis prædictis, ad rectangulum ex maximâ & mediâ propottionalium prædictarum.

SIt enim Hemisphærium ABC, centrum D, axis DB, qui producatur in E, sed non fiat BE maior BD, demonstrationis gratiâ in Hemisphærio; Si vero maior fuerit, demonstrationis tamen eadem erit ratio; sed euadet figura in portionem maiorem Hemisphærio, quod a proposito nostro alienum est: Fiat ideo



EB minor quam BD; & sicut ED ad BD, ita sit BD ad FD; Fiat etiam FG æqualis FB, & per punctum G ducatur planum HI, basi AC parallelum; & a punctis H & I ad E ducantur lineæ, vnde concipiatur conus HEI, quem iam demonstrabimus æqualem esse portioni HBI.

Cum enim per constructionem FG & FB sint æquales; erit FD media in Arithmetica ratione inter BD & GD: & ideo æqualis erit dimidio aggregati ex BD & GD; quare erit sicut aggregatum ex BD & GD ad duplam BD, ita FD ad BD, & BD ad ED; factæ sunt enim per constructionem ED, BD, FD in eâdem ratione; & quadrata HB & HG etiam sunt in eâdem ratione; vnde per ea quæ iam demonstrauimus, 14. huius.

conus

Conus HEI est æqualis portioni HBI.

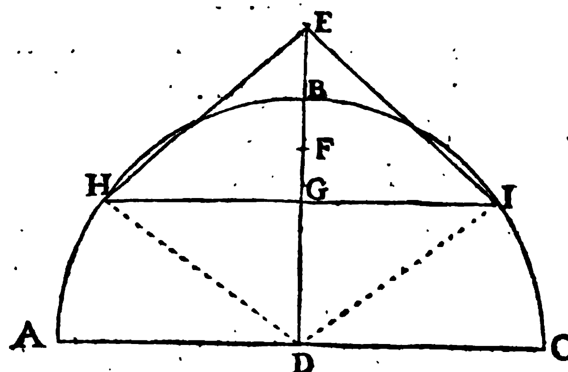
Cum etiam excessus ED supra FD, sit linea EF, & excessus BD supra FD, sit linea BF, vel FG; erit tota EG, excessus duarum maiorum ED & BD, supra duplam FD, & si vtrique addita fuerit FD, erit excessus trium proportionalium videlicet ED, BD & FD, supra FD minorem ter. Est autem conus HEI, ad conum HBI, sicut EG ad BG; BG autem est excessus mediæ supra minorem bis. Conus igitur HEI, vel portio HBI (sunt enim æquales,) est ad conum HBI, sicut EG ad BG, hoc est excessus trium proportionalium super minorem ter, ad excessum mediæ supra minorem bis; quod primo erat demonstrandum. & corollarium eiusdem.

Proportio autem portionis ad Hemisphærium composita est ex proportione eiusdem ad sectorem, & sectoris ad Hemisphærium. Ducantur itaque lineæ HD, & ID, & concipiatur Rhombus HEID, qui ob æqualitatem coni HEI & portionis HBI, æqualis est sectori HBID. Proportio autem portionis ad Rhombum, vel sectorem, est eadem quæ lineæ EG ad lineam ED; sectoris vero ad Hemisphærium est ratio BG ad BD. Sunt enim in ratione superficierum suarum, & superficies in ratione segmentorum axis hemisphærij. Proportio itaque composita est ex ratione EG ad ED, & BG ad BD. Est igitur per 23. sexti Elementorum portio ad Hemisphærium, sicut rectangulum ex EG in BG, hoc est excessu trium proportionalium supra minorem ter in excessum mediæ supra minorem bis, ad rectangulum ex ED in BD, hoc 6. huius. 8. huius.

est

eſt ex maxima trium proportionalium prædictarum in mediam earum; ſicut in propoſitione enunciatum fuit.

COROLLARIVM.



Ex hoc apparet quod fieri poſſit portio, quæ ad conum ſuum habeat rationem datam maioris inæqualitatis modo non excedat duplam, & quod ſemper maior ſit quàm ſeſquialtera. Quod autem proportio ſemper maior ſit quàm ſeſquialtera, ſic demonſtratur. Lineæ enim E D, B D, & F D ſunt proportionales, & exceſſus earum E B & B F, in eâdem ratione; B G vero eſt dupla B F; ſi igitur conus conſtituatur æqualis portioni ſuper eâdem baſi, excedet ſemper conum portionis parte maiori quam dimidiâ; & ideo portio ad conum ſuum maiorem habet rationem quam ſeſquialteram.

Portio ad conum ſuum in ratione data.

Iam ſi data ſit ratio, quam habet E G ad B G, in quâ oporteat inuenire portionem ad conum ſuum; di-

nidatur B G bifariam in F; & ſicut E B ad B F, ita ſint duo aliæ lineæ, quarum differentia ſit E B; hoc autem fieri poteſt. Et hoc modo inueniemus centrum Hemiſphærij D, & portionem H B I.

Ex demonſtratis etiam apparet quod ratio G B ad B E ſit eadem quam habet duplum quadrati H G ad quadratum H B; & quod portio ſe habeat ad conum ſuum, ſicut dupla baſis vnà cum ſphæricâ ſuperficie portionis ad duplam baſim. Cum enim ſit E B ad B F in ratione duplæ B D ad B D & G D tanquam vnam; erit ſicut E B ad B F, ita quadratum H B ad quadratum H G; & ad poſteriorum dupla, ſicut E B ad B G, ita quadratum H B ad duplum quadrati H G, & permutando &c. Portio autem ſe habet ad conum ſuum ſicut E G ad G B; hoc eſt componendo, ſicut quadratum H B vnà cum duobus quadratis H G ad eadem quadrata H G. Et hoc verum eſt in omni portione, etiam maiori quam Hemiſphærium.

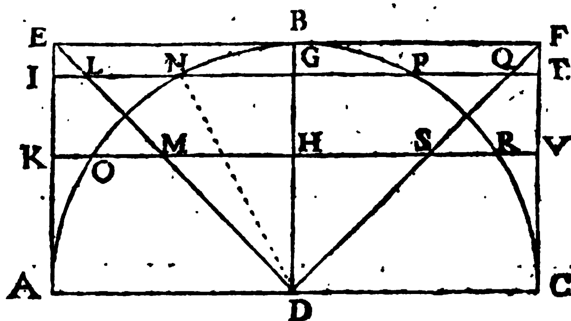
Vide infra poſt prop. 33.

II.

PROPOSITIO XXXI.

Exceſſus Cylindri conſtituti ſuper baſi & circa axem Hemiſphærij, ſupra conum rectangulum in eodm Cylindro, æqualis eſt Hemiſphærio; & ſingulæ partes, ſingulis partibus hemiſphærij inter eadem plana vbicunque interceptis æquales erunt.

HAEC Propositio est consectarium ad septimam huius, in quâ agitur de æqualitate excessûs Cylindri supra Hemisphærium ad conum rectangulum; & probatur quod excessus ille sit æqualis cono rectangulo inscripto Cylindro; & quod singulæ partes correspondentes singulis partibus inter eadem plana parallela sint etiam æquales; vnde etiam sequebatur proportio sesquialtera Cylindri ad Hemisphærium: In hac verò demonstrabimus (quod etiam demonstrari potuisset in dicta octaua huius) æqualitatem Hemisphærij & partium eius ad excessum Cylindri supra conum rectangulum.



Sit igitur Hemisphærium ABC, & Cylindrus EC supra basim & circa eundem axem cum hemisphærio, & in Cylindro sit conus rectangulus EDF, inuersè positus ad Hemisphærium; & secentur omnia duobus planis IT & KV, basi hemisphærij parallelis; scilicet conus in L, Q, & M, S; Hemisphærium in N, P, & O, R; & axis eorum communis in G & H. Dico quod totus excessus Cylindri EC, supra conum re-

ctangulum EDF, æqualis ſit Hemiſphærio ABC; & quod ſingulæ partes ſingulis partibus correſpondentes inter eadem plana parallela, ſint inter ſe æquales.

Ad demonſtrationem verò vtemur eodem artificio, quo vſi ſumus ad demonſtrationem ſeptimæ huius.

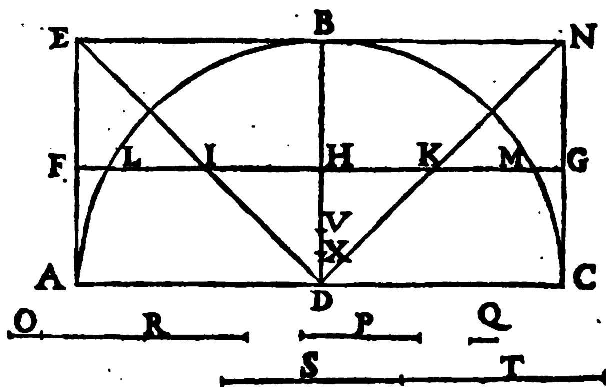
Cum enim quadratum radij Hemiſphærij BD in omni parallelo vtcũque ducto, ſit æquale duobus quadratis radiorum circulorum a ſectione factorum; videlicet in plano IT, quadratum ex DN vel BD (ſunt enim æqualia) æquale eſt duobus quadratis ex NG, & GD; GD vero æqualis eſt LG, igitur quadratum ex ND, æquale eſt duobus quadratis NG & LG; Circulus igitur factus a radio ND vel IG (ſunt enim æquales) æqualis eſt duobus circulis factis a radij LG, & NG. Sed circulus ex radio IG, eſt circulus in Cylindro factus ex interſectione plani IT; circulus verò ex radio LG, eſt circulus in cono rectangulo; denique circulus ex radio NG, eſt in Hemiſphærio factus ex eadem interſectione plani IT. Rurſus circulus ex IG radio, æqualis eſt duobus circulis ex radijs LG, & NG; eſt etiam æqualis circulo ex LG vnà cum exceſſu, ſcilicet eo quod factum eſt ex parte IL, vnde exceſſus ille æqualis eſt circulo ex radio NG; exceſſus igitur circuli facti in Cylindro EC ſupra circulum factum in cono rectangulo EDF æqualis eſt circulo facto ex radio NG in hemiſphærio ABC: Idem demonſtrabitur in circulis factis per interſectionem plani KV; & in omnibus planis baſi AC parallelis, vtcunque interſecantibus Cylindrum, conum rectangulum, & Hemiſphærium. Vnde per lemma ante propoſitionem

7. huius apparet, quod totus excessus Cylindri EC, supra conum rectangulum EDP, æqualis sit Hemisphærio ABC; & quod singulæ partes eiusdem, singulis partibus dicti Hemisphærij correspondentes inter eadem plana, sint etiam æquales; scilicet quod pars Cylindri notata literis ILMK, SQTV, æqualis sit parti Hemisphærij ONPR; & sic per totum; quod demonstrandum erat.

PROPOSITIO XXXII.

Si Hemisphærium sectum fuerit vtcunque plano ad basim parallelo; & sicut axis Hemisphærij ad axem segmenti, ita fuerit axis portionis ad secundam, & secunda ad tertiam; Portio ita se habebit ad Hemisphærium, sicut excessus, quo triplus axis eius excedit tres prædictas proportionales ad duplum axem Hemisphærij.

SEcetur enim Hemisphærium ABC vtcũque plano FG, basi AC parallelo, secante axem BD in H: Concipiatur iam Cylindrus AN super basi hemisphærij AC & in eadem altitudine constitutus, & in eo inscriptus conus rectangulus EDN inuerse positus Hemisphærio; qui etiam secti sint plano FG, Cylindrus scilicet in F & G, conus rectangulus in I, & K, He-



misphærium vero in L, & M. Fiat iam linea OR æqualis axi Hemisphærij BD, & P æqualis HD; & sit ratio OR ad Q, tripla eius quam habet ipsa OR ad P. Quare sicut conus EDN ad conum IDK, ita erit linea OR ad lineam Q; & subductâ lineâ Q ab OR lineâ, reliqua R, erit ad totam OR; sicut truncus coni EIKN ad conum totum EDN.

Rursus fiat linea ST æqualis triplæ BH, ex quâ subtractâ parte T æquali lineæ R, reliqua S erit ad totam ST, sicut excessus Cylindri EG supra truncum coni EIKN, hoc est sicut portio LBM, ad Cylindrum EG. Sed Cylindrus EG est ad conum EDN, sicut tripla BH ad BD, hoc est sicut tota ST ad totam OR. Ex æquali igitur erit sicut linea S ad totam OR, ita portio LBM ad conum EDN. Hemisphærium verò ABC est duplum coni EDN; quare portio LBM erit ad Hemisphærium ABC, sicut linea S ad duplam totius OR. Sed linea R, vel T, est aggregatum trium proportionalium, quarum BH ma-

xima in ratione BD ad DH: quod sic probabimus: Sit enim sicut BD ad DH, ita BH ad HV, & HV ad VX; & quoniam est sicut BD ad DH, ita BH ad HV; erit permutando sicut BD ad BH, ita DH ad HV; & per conuersionem rationis sicut BD ad HD, ita HD ad VD: Iterum cum sit sicut HD ad VD, ita HV ad VX; erit permutando & per conuersionem rationis (ut prius) sicut HD ad VD, ita VD ad XD. Quare sunt quatuor lineæ continue proportionales BD, HD, VD & XD. Facta est autem Q linea in triplâ ratione (& ideo quarta proportionalis) ad lineam OR, eius quam habet ad P lineam, hoc est in triplâ ratione ad axem BD, eius quam habet ipsa BD ad HD axem segmenti (sunt enim æquales BD, OR, & HD, & P.) Quare Q æqualis est lineæ XD, cum sint ambæ in eâdem ratione ad axem BD: deductis igitur ex æqualibus BD & OR, æqualibus Q & XD, quæ remanet pars R æqualis erit parti BX. Igitur pars T æqualis etiam erit BX, aggre-

gato trium linearum proportionalium BH, HV, & VX. Linea vero ST est æqualis triplæ BH; quare parte T deductâ, linea S erit æqualis excessui quo triplus axis portionis LBM excedit tres illas proportionales, quarum maior est axis portionis: Ratio igitur portionis ad Hemisphærium est sicut lineæ S ad duplam BD; vel sicut excessus triplæ BH supra tres proportionales, seu lineam BX, ad duplam axem Hemisphærij, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Hinc sequitur quod datâ ratione segmẽtorum axis, data est etiam ratio portionis ad Hemisphærium: Inuentâ enim (ex ratione datâ BD ad HD) lineâ BX; vel aggregato trium proportionalium, quarum BH maior, & deductâ BX ex triplâ BH, manifesta erit linea S; quæ ratio S ad duplam BD, est portionis ad Hemisphærium.

PROPOSITIO XXXIII.

Si super eâdem basi & circa eundem axem constituta fuerint Hemisphærium & Cylindrus, & in Cylindro conus rectangulus inuersè positus Hemisphærio, quæ omnia secta fuerint vtcunque infra communem intersectionem Hemisphærij &

Coni plano ad baſim parallelo, faciente circulos in Hemiſphærio, cono, & Cylindro; & ſi ſuper circulo in cono pro baſi conſtituatur Cylindrus alter, & tertius ſuper circulo facto in Hemiſphęrio, circa partem axis inter polum Hemiſphærij & planum ſecans; pars Hemiſphærij dempto Cylindro facto ſuper ſectione coni, æqualis eſt parti Cylindri factæ ſuper ſectione Hemiſphærij, dempta parte coni in eodem Cylindro interceptâ.

SIt Hemiſphærium ABC, centrum D, axis BD; & ſuper eadem baſi hemiſphærij AC conſtituatur Cylindrus eiuſdem altitudinis FC; & in eo inuersè poſitus ſuper baſi FG æquali baſi hemiſphærij AC, ſit conus rectangulus FDG, cuius & hemiſphærij ſit cō-

munis intersectio E; & infra ducatur vtcunque planum HI basi AC parallelum secans hemisphærium in L, & Q, conum rectangulum in K & N, & axem communem in M: constituatur etiam super circulum factum in cono KN Cylindrus ON, & super circulum in Hemisphærio LQ Cylindrus PQ. Dico partem Hemisphærij ABC, interceptam in Cylindro PQ, dempto Cylindro ON, scilicet quæ notatur literis LRK; NSQ, æqualem esse parti eiusdem Cylindri inter eadem plana (dempto cono rectangulo) interceptæ, & signatæ literis LTK, NVQ. Transeat enim planum per TRSV, quod sit TV, & ducatur linea LD:

Et quoniam quadratum LD æquale est quadratis LM, & MD, quadratum vero HM æquale est ijsdem quadratis; lineæ enim sunt æquales; sunt etiam æquales lineæ KM & MD; Quadratum igitur HM æquale est quadratis LM & KM. Circulus vero ex radio HM, hoc est circulus in Cylindro FC, æqualis est circulo ex radio LM, hoc est circulo in Hemisphærio LQ, vnà cum reliquo facto ex parte HL; quod igitur factum est ex parte HL æquale est circulo facto ex radio KM: æqualis igitur est Cylindrus ON excessui Cylindri FI supra Cylindrum PQ, hoc est solido incauato constituto super excessu circuli HI supra circulum LQ; demptis igitur ex æqualibus, scilicet ex parte hemisphærij LRSQ, parte Cylindri ON, notatâ literis KRSN, & ex excessu Cylindri FI supra truncum coni rectanguli FKNG, parte excauati solidi notatâ literis HT, & VI, quæ reliquæ sunt partes Hemisphærij & excessus Cylindri FC supra co- Per 31. huius æquales sunt.

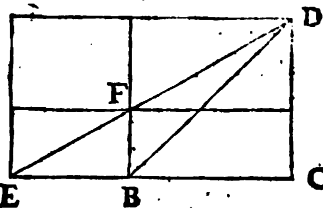
num

num rectangulum inter eadem parallela plana sunt inter se æquales, quod demonstrandum erat.

COROLLARIVM.

Multa alia ex hac demonstratione occurrunt circa æqualitatem partium; quemadmodum si sectio fiat supra E, vtpote in plano TV, erunt partes FPT, & ORB, inter se æquales scilicet in Cylindro ON, & in reliquo, vel excessu Cylindri FI supra Cylindrum PQ: Similiter & pars LTE parti ERK, ablatâ communi LEK. Iterum si producti fuerint Cylindrus ac etiam excessus prædictus vsque ad basim AC, manifesta erit æqualitas inter partem KZD & excessum LAX ex deductione æqualium AHL, KMD: quod necessarium animaduertisse duxi.

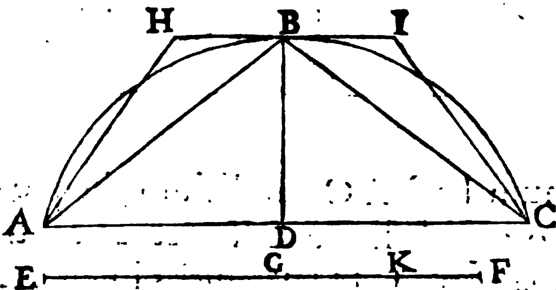
Quod assumptum fuit in fine Coroll. Prop. 30. sic demonstrabitur. Data enim sit EB differentia laterum rectanguli quæsiti, & ratio laterum sit EB ad BF, ex quibus fiat rectangulum EF; Ducatur iam diameter EF, & producatur quantum opus; Producto etiam latere EB, diuidatur angulus FBC, bifariam lineâ BD, quæ quoniam anguli FEB, EBD sunt minores duobus rectis coincidet cum productâ EF; Concurrant igitur in puncto D, a quo demittatur perpendicularis DC ad productam EB, & compleatur rectangulum ED. Dico latera EC, & CD, esse latera rectanguli quæsiti.



Est enim sicut EB ad BF, ita EC ad CD, & est BC, æqualis CD; Igitur EB est excessus lateris EC supra latus CD, & Rectangulum ED est quod quærebatur.

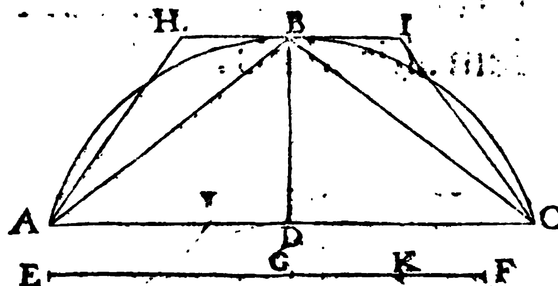
PROPOSITIO XXXIV.

Cuicunque portioni sphæræ datę, quę non sit maior Hemisphærio, æquale Truncum coni constituere super eâdem basi, & eiusdem altitudinis.



Esto portio ABC, super basi AC, in quo inscribatur conus ABC, super eadem basi. Et quoniam conus se habet ad portionem ABC, sicut duplum quadratum AD, ad idem duplum quadratum vnà cum quadrato AB: proportio vero eiusdem coni ABC, ad truncum quæsitum, est sicut lineæ AD, ad tres continue proportionales, quarum AD radius basis maioris, prima, & HB radius basis minoris, Corol. 2. tricesimi huius. 16. huius.

secunda; Eadem vero erit ratio radij AD ad compositam ex eadem AD, vna cum reliquis duabus proportionalibus, quae dupli quadrati AD, ad compositum ex eodem duplo quadrato vnà cum quadrato AB. Fiat itaque sicut duplum quadrati AD ad idem duplum vnà cum quadrato AB, ita linea AD ad lineam EF; quae diuidatur in puncto G, vt sit pars EG aequalis AD; reliqua vero GF in K, vt sint EG, GK, KF, tres lineae continue proportionales; & per punctum B,



transseat planum basi AC parallelum, in quo fiat circulus ex radio aequali lineae GK, cuius centrum B, qui sit circa diametrum HI; & ductis lineis AH, IC, concipiatur truncus coni AHIC; Dico hunc aequalem esse portioni ABC.

Quoniam enim truncus coni AHIC se habet ad conum ABC, super eâdem basi AC & eiusdem altitudinis BD, sicut tres lineae continuae proportionales in ratione radij AD ad radium HB; hoc est sicut linea EF ad lineam EG, vel AD, (sic enim per constructionem factum est,) erit permutando sicut AD ad EF, ita conus ABC, ad truncum coni AHIC;

16. huius.

Sed

Sed factum est etiam sicut conus A B C ad portionem A B C, ita A D lineā ad E F lineam; Ex æquali igitur sicut Conus A B C ad truncum coni A H I C, ita idem Conus ad portionem A B C. Aequales igitur sunt truncus coni & portio super eâdem basi & in eâdem altitudine constituti; quod faciendum erat. Cor. 30. huius.

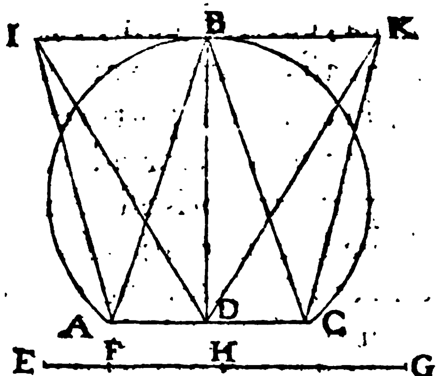
SCHOLIVM.

Hic obseruandum duxi, quod nulla sit portio sphæræ præterquam vna, cui non constitui possit truncus Coni super eadem basi & eiusdem altitudinis cum portione, æqualis; Hæc autem portio est, quando axis sphæræ secta est, vt sit pars maior ad reliquam tripla; vnde quadratum partis maioris est ad rectangulum ex partibus, vel ad quadratum radij basis portionis, in eâdem ratione scilicet triplâ; & tunc portio (cum sit ad conum suum, sicut triplum radij basis quadratum vnâ cum quadrato axis, hoc est sex quadrata, ad eiusdem duo quadrata, in ratione tripla) erit tripla coni & ideo æqualis Cylindro super eâdem basi & eiusdem altitudinis constituto: Truncus igitur coni non potest constitui ei æqualis super eâdem basi & in eâdem altitudine. Si vero secta fuerit diameter sphæræ in maiori quàm triplâ ratione partium, etiam fieri potest truncus coni maiori portioni æqualis, sed basis portionis erit minor basis trunci, quod sic demonstratur.

Cylindrus æqualis portioni sphæræ super eadē basi & eiusdē altitudinis.

PROPOSITIO XXXV.

Datæ portioni ſphæræ, quæ habet rationem quadrati axis ad quadratum radij baſis maiorem quam triplam, Inuenire æquale fruſtum coni eiuſdem altitudinis, & ſuper eadem baſi.



SIt portio ſphæræ A B C, axis B D, radius baſis A D; & ſit ratio quadrati B D ad quadratum A D, maior quàm tripla; & inſcribatur conus A B C, circa eundem axem B D, & ſuper eâdem baſi A C; & cum nota ſit proportio coni A B C, ad portionem A B C, fiat ſic linea E F, ad E G lineam, & erit E G maior quam tripla E F; quoniam portio maior eſt, quàm tripla coni inſcripti: Diuidatur iam F G in H, vt ſint E F, F H, H G, continue proportionales; & ducto plano per polum B parallelo baſi A C, in eo fiat circulus ex radio B I, in ratione ad A D, ſicut F H, ad E F; &

Per Coroll. 2. triceſimi huius. Scholium precedens. 15. huius.

ductis lineis A I, C K, concipiatur A I K C truncus coni: Quem dico æqualem esse portioni sphæræ ABC. 16. huius.

Cum enim factum sit sicut conus A B C, ad portionem A B C, ita E F, ad E G; factum est etiam sicut F H ad E F, ita I B radius basis maioris ad A D radium minoris basis trunci coni A I K C, & quoniam Coni I D K, & A B C habent bases suas ex iisdem radijs scilicet I B, & A D & eiusdem altitudinis; erit Conus IDK ad conum A B C, sicut H G, ad E F, hoc est in duplicatâ ratione F H, ad E F. Sed cum sit eadem proportio trunci A I K C ad conum I D K, quæ lineæ E G ad lineam H G; & coni I D K ad conum A B C, quæ lineæ H G ad lineam E F, ex æquali eadem erit proportio Trunci A I K C ad Conum A B C, quæ lineæ E G ad lineam E F; & permutando sicut E F ad E G, ita Conus A B C ad Truncum coni A I K C. Sed per constructionem facta est E F ad E G sicut Conus ABC ad portionem suam A B C. Aequales igitur sunt Portio A B C, & Truncus coni A I K C, qui constitutus est super eâdem basi & eiusdem altitudinis. Quod faciendum proponebatur.

COROLLARIVM.

Ex hoc elicitur, quod tres Coni in eâdem ratione, quâ sunt radij basium trunci, & eiusdem altitudinis, sint æquales Trũco Coni; nam cum sint sicut tres proportionales in ratione radiorum basium trunci, ad maximam earum, ita truncus coni A I K C ad Conum I D K; Sed & tres Coni in eâdem ratione sunt ad maxi-

mam earum in eâdem ratione. Consequitur ergo quòd tres coni, scilicet Conus IDK, ABC, & alter qui sit medius proportionalis inter eos, sint æquales Trunco Coni AIKC.

PROPOSITIO XXXVI.

Truncum coni inscribere Cylindro super eiusdem basi & in eâdem altitudine, qui habeat ad Cylindrum rationem datam. Ratio autem debet esse maior, quam subtripla.

SIt Cylindrus AB, cuius axis CD, & ratio data sit ea quam habet linea FL ad lineam G, in qua constituendus sit truncus coni ad Cylindrum AB.

Quoniam verò FL maior est quam tertia pars lineæ G, abscindetur ab eâ pars FH æqualis tertiæ parti eiusdem, & diuidatur reliqua in puncto K, vt sint

F H, H K, K L, continue proportionales; & fiat sicut F H, ad H K, ita A D radius basis Cylindri ad C I, pro radio basis minoris trunci; ex quo facto circulo circa diametrum I M, & ductis lineis A I, M E, concipiatur Truncus coni A I M E. Quem dico habere ad Cylindrum datum A B, rationem datam lineæ F L ad lineam G. 15. huius.

Quoniam enim factum est sicut F H ad H K, ita A D ad I C; erit sicut F L ad F H, ita Truncus Coni A I M E, ad conum A C E. Igitur sicut F L ad triplam F H, vel lineam G; ita truncus A I M E ad Cylindrum A B, quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

Simili prorsus modo, Cylindro circumscribi potest Truncus coni in ratione datâ. Cùm enim conus super basi minori trunci & eiusdē altitudinis sit, sicut minor trium proportionalium ad tres proportionales simul, in ratione radij minoris basis, ad radium maioris; Cylindrus verò sit triplus eiusdem coni; habebit rationem quam habet triplus radius minoris, ad tres dictas proportionales. Sit igitur ratio data lineæ A B ad lineam C, in quâ circumscribendus sit a Trunco coni Cylindrus datus; & in A B sumatur pars A D æqualis tertiæ parti ipsius C, reliqua vero D B diuidatur in E, vt sint A D, D E,

A D E B

C

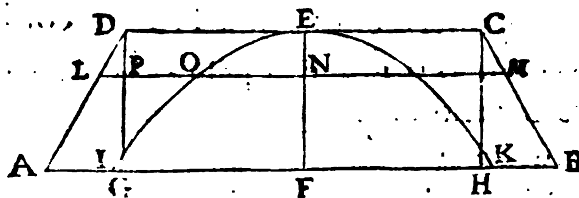
E B continue proportionales. Et quoniam A D est tertia pars lineæ C, erit truncus coni quæsitus ad co-

num

num super minori basi, sicut tota AB ad AD. Fiat igitur sicut AD ad DE, ita radius basis Cylindri ad radium basis maioris Trunci; & compleatur ex his basibus circa eandem diametrum Cylindri Truncus coni; Quem dico habere eandem rationem ad Cylindrum datum, quam habet linea AB ad lineam C. Demonstratio ex praecedentibus, & constructione constat.

PROPOSITIO XXXVII.

Si in Trunco Coni constitutus fuerit Cylindrus super basi minori eius, & circa eundem axem; erit excessus trunci supra Cylindrum aequalis cuidam conoidi Hyperbolico, cuius vertex est centrum basis minoris trunci, altitudo vero eadem, & cuius genetricis Hyperbolae asymptoti sunt in lateribus eiusdem Trunci.



Super basi AB, constituatur truncus coni ADCB, cuius minor basis sit DC, eique aequalis facta sit

GH; & circa axem EF trunci & basim eandem GH concipiatur Cylindrus GDCH: Dico excessum trunci ADCB supra Cylindrum GDCH æqualem esse Conoidi cuidam Hyperbolico, cuius vertex punctum E, & Hyperbolæ (a cuius reuolutione factum est) asymptoti sint in lateribus ipsius trunci. Secentur enim omnia plano per axem; & basi AB, parallela ducatur linea vtcunque LM, secans axem in N, & lineam DG in P puncto.

Quoniam igitur linea LM secta est bifariam in N, & non bifariam in P; erit rectangulum LPM vna cum quadrato PN æquale quadrato LN: quod cùm sit maius rectangulo LPM, sit pars eius scilicet quadratum ON, ei æquale; quadratum igitur ON vnà cum quadrato PN, vel DE simul, æqualia sunt quadrato LN: Sed quadrato etiam ON vnà cum rectangulo LOM, æquale est idem quadratum LN; rectangulum igitur LOM, æquale est quadrato PN, vel DE.

Si igitur in plano per axem circa diametrum EF, per puncta E, O, ducta fuerit Hyperbola; erit quadratum DE æquale quartæ parti figuræ, & per totum quadrilaterum ABCD, vbicunque ducta fuerit linea LM æquidistans basi AB, erit rectangulum ex parte intercepta inter latus AD & Hyperbolam EOI in reliquam, æquale quadrato DE, vel quartæ parti figuræ. Vnde constat quod si ex radijs ON, & PN, vbicunque sumptis facti fuerint circuli, erunt ambo simul æquales circulo ex radio LN. Sed & circulus ex radio LN æqualis est circulo ex radio PN vnà cum excessu

Apollonij lib 2. propos. 10.

N su qui

su qui fit ex parte L P. Excessus igitur, qui fit ex parte L P, æqualis est circulo facto ex radio O N; Vnde, per ea quæ demonstrata sunt, erit excessus trunci conici A D C B, supra Cylindrum G C, hoc est corpus illud solidum factum ex reuolutione trianguli A D G, circa axem E F, æquale Conoidi Hyperbolico I E K. Quod autem latera A D, C B, sint ipsius hyperbolæ asymptoti; manifestum est ex demonstratis ab Appollonio libro secundo conicorum.

Lẽma ante prop. 7. huius.

PROPOSITIO XXXVIII.

Si in Cylindro inscribatur circa axem eius Conus qui non sit rectangulus; erit excessus Cylindri supra conum, æqualis Hemisphæroidi circa eundem axem constituto; & singulæ partes excessus inter eadem plana interceptæ, æquales erunt singulis eiusdem Hemisphæroidis partibus inter eadem plana interceptis.

SIt Cylindrus A E, cuius axis B D; & super basim eius A C, & circa eũdem axem inscribatur Conus A B C qui non sit rectangulus: si enim fuerit rectangulus, tunc excessus Cylindri supra conum æqualis est hemisphærio, vti iam demonstratum est. Dico iam excessum Cylindri A E supra conum A B C, æqualem esse Hemisphæroidi cuidam constituto super basi F E

31. huius

&cuius

& cuius idem ſit axis BD.

Secentur enim Cylindrus & Conus plano GH ad baſim AC parallelo, vtcunque per axem in puncto I; & producto axe in K, vt ſit BK æqualis BD, fiat ſicut rectangulum KBD, vel quadratum BD, ad quadratum BE vel DC, ita rectangulum KID, ad quadratum IL; & erit punctum L in Ellypſi. Sed ſicut quadratum BD ad quadratum DC, ita quadratum BI, ad quadratum IM. Erit igitur componendo, ſicut rectangulum KID vnà cum quadrato IB, ad quadratum IL vnà cum quadrato IM, ita quadratum BD ad quadratum DC. Sed rectangulum KID vnà cum quadrato BI, æquale eſt quadrato BD: Quadrata igitur IL, & IM ſimul æqualia ſunt quadrato DC. Circulus igitur ex radio DC, vel IH, æqualis eſt duobus circulis ex radijs IM, & IL; hoc eſt circulis factis in cono ABC, & in Hemiſphæroide, cuius baſis circulus FE, & vertex punctum D: Et ſic per totum Cylindrum AE, vbicunque ſectus fuerit plano GH baſi AC parallelo, erit circulus factus in Cylindro æqualis duobus circulis factis, ſcilicet in Cono, & Hemiſphæroide. Sed idem circulus ex radio IH, æqualis eſt circulo ex radio IM in cono, & exceſſu facto ex parte MH. Vnde manifeſtum eſt, quòd exceſſus per totum Cylindrum æqualis ſit Hemiſphæroidi; & quod ſingulæ par-

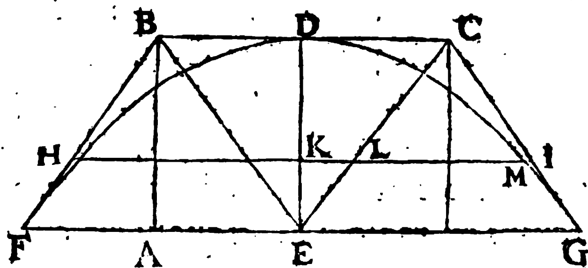
21. primi Apollonij.

A D C G I M L H F E B K

tes singulis correspondentes sint æquales, quod demonstrandum erat.

PROPOSITIO XXXIX.

Si in Cylindro inscribatur Conus super basi eius; & circa eundem Cylindrum circumscribatur Trũcus coni, cuius minor basis sit eadem cum Cylindro & cono, & si figuræ planæ ex sectione trunci coni & coni per axem factæ, habeant latera opposita parallela; erunt ambo excessus scilicet Cylindri supra conum, & Trunci coni supra Cylindrum simul sumpti, ęquales Conoidi cuidam parabolico circa eundem axem & super eâdem basi cum trunco coni constituto.



Sit enim Cylindrus AC, in quo sit insctiptus Conus BEC; & circa eundem AC Cylindrum, &

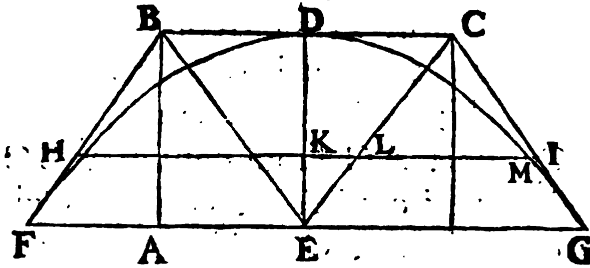
ſuper baſi eiuſdem BC, (quæ etiam eſt baſis inſcripti coni) circumſcribatur Truncus coni FBCG, ita vt ſi ſecti fuerint plano per axem DE, ſint latera oppoſita FB, CE parallela; ſimiliter & latera BE, CG. Dico exceſſum Cylindri AG ſupra conum BEC, vna cum exceſſu trunci coni ABCG ſupra Cylindrum AC, ſimul æquales eſſe Conoidi cuidam Parabolico circa eundem axem DE & ſuper eâdem baſi FG conſtituto. Ducatur enim vtcunque planum baſi FG parallelum faciens in ſectione per axem lineam HI, ſecans vero axem DE in K, & latus coni EC in L.

Et quoniam lineæ FB, EC ſunt parallelæ; æquidiſtantes etiam ſunt FE, HL, quare æqualis eſt HL ipſi FE, ideoque rectangulum HLI ad rectangulum FEG ſe habet ſicut LI linea ad lineam EG. Sed ſicut LI ad EG, ita eſt CL ad CE, & DK ad DE. Rectangulum igitur FEG, vel quadratum EG, eſt ad rectangulum HLI, vel ad quadratum ei æquale, ſicut linea DE, ad lineam DK. Quare ſi in linea KI ſumatur quoddam punctum M, ita vt quadratum KM ſit æquale rectangulo HLI; erit punctum M in Parabolâ, circa axem DE, cuius vertex punctum D, & ordinatim applicatæ ſunt lineæ KM, & EG. Et ſic per totum triangulum ECG, vbicunque ducta fuerit linea parallela ad FG, erit rectangulum ex parte interceptâ & partæ extrâ, inter parallelas FB, & EC, in eâdem ratione ad rectangulum FEG, vel quadratum EG, ſicut pars axis quæ ad verticem D, ad totum axem DE.

Deducitur ex 11. primi Apollonij. 20. eiuſdem.

Sed exceſſus quadrati KI ſupra quadratum KL,

eſt re-



est rectangulum H L I, (& sic in reliquis;) vnde si concipiantur circuli facti ex radijs K L & K I, (& sic in reliquis Coni B E C, & trunci F B C G partibus) erunt excessus circulorum in trunco supra circulos in Cono, inter se semper in ratione segmentorum diametri D E (scilicet partium interceptarum inter verticem D & sectionem) ad totam D E. Sed ita se habent in Parabola ordinatarum applicatarum quadrata; Vnde manifestum est quod corpus solidum ex reuolutione earum factum, æquale erit excessui trunci Coni F B C G supra Conum B E C; quod erat propositum demonstrare.

COROLLARIVM.

In præcedentibus demonstratum est, quòd excessus Trunci Coni supra Cylindrum æqualis sit Conoidi Hyperbolico; & quòd excessus Cylindri supra Conum non rectangulum æqualis sit Hemisphæroidi, & iam demonstrauimus, quod duo illi excessus simul sint æquales Conoidi Parabolico. Vnde etiam manifestum est, quòd Conoides Parabolicum æquale sit Conoidi

Hyperbolico, & hemisphæroidi simul sumptis, (supposito quòd truncus Coni habeat conditionem in propositione declaratam.) Ex quo etiam sequitur, quòd cùm Hemisphæroides sit duplum Coni inscripti sicut ab Archimede demonstratur, Conoides hyperbolicum erit Hemisphæroidis duplum, (omnia enim simul sumpta æqualia sunt Trunco Coni, qui septuplus est coni B E C:) ac etiam quòd excessus Trunci Coni supra Conoide Parabolicum æquale sit Cono B E C; & quòd sic se habebit semper quando diameter transuersa Hyperbolæ, ex cuius reuolutione factum est Conoides Hyperbolicum æqualis fuerit axi Ellipsis genetricis eiusdem Hemisphæroidis, & figuræ ipsarum similes: Vnde per Geometriam Indiuisibilium, a Patre Bonauentura Cauallerio nuper repertam, facile demonstrabitur, quod ratio ipsorum Solidorum sit dupla; hoc autem studiosis relinquo, cum non sit intentum meum in hanc messem immittere falcem: Multa autem sunt, quæ, ope huius Geometriæ, facilius in lucem prodeunt, quam veteri Archimedis methodo, & ideo a Geometris non negligendam censeo.

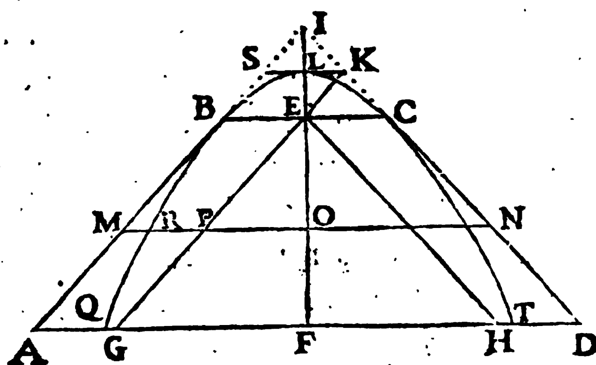
Prop. 29. de Conoi. & Sphæroidibus.

Excessus Trunci supra Conoide Parabolicã æquale Cono.

PROPOSITIO XXXX.

Si in trunco Coni inscriptus fuerit Conus circa eundem axem, ita vt si secti fuerint plano per axem, habeant quæ facta sunt in plano latera inuicem parallela ad eas-

dem partes; Excessus Trunci supra Conum, æqualis erit frusto Conoidis Parabolici, circa eundem axem, & inter bases eiusdem trunci Coni constituto, & latera Trapeziæ per sectionem factæ erunt tangentes ipsius Parabolæ.

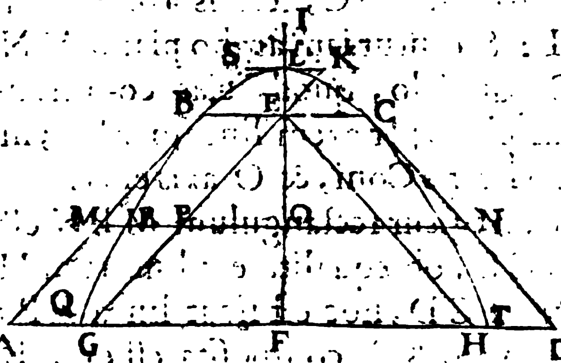


SIt Truncus Coni ABCD, cuius axis EF, & circa eundem Conus GEH, ita constitutus vt cum secti fuerint per axem, lineæ AB, GE, sint parallelæ, Dico excessum Trunci ABCD, supra Conum GEH, æqualem esse frusto Conoidis cuiusdam Parabolici, circa eundem axem & inter bases eiusdem trunci constituto; cuius Parabolæ, lineæ AB & CD sunt tangentes. Secetur enim tam Truncus quam conus plano per axem FE, & producantur latera AB, DC donec concurrant in I, in quo etiam puncto axis FE productus illis occurrat: Producatur etiam latus GE in K, ad concursum lineæ DC productæ; & a puncto K aga-

tur K S, parallela B C, secans axem productum in puncto L: Secentur iam ambo plano M N vtcunque basi A D parallelo, quod faciat communem sectionem cum plano per axem lineam M N; in quâ sit P intersectio lateris Coni, & O axis eius.

Quoniam igitur rectangulum M P N est ad rectangulum A G D, ob æqualitatem linearum M P & A G, sicut P N ad G D, hoc est sicut linea K P ad lineam K G; linea vero K P, composita est ex K E & E P, & linea K G, ex K E & E G; est autem sicut K E ad E P, ita L E ad E O; & componendo K P ad E P, sicut L O ad E O; & permutando K P ad L O, sicut E P ad E O: iterum sicut K E ad E G, ita L E ad E F; & componendo sicut K G ad E G; ita L F ad E F; & permutando K G ad L F, sicut E G ad E F; sed eadem est ratio E G ad E F, & E P ad E O. Quare eadem etiam erit ratio K G ad L F, quæ K P ad L O; & permutando sicut K G ad K P, ita L F ad L O. Rectangulum ergo M P N est ad rectangulum A G D, sicut linea L O ad lineam L F.

Si igitur in linea A F sumatur pars F Q, cuius quadratum æquale sit rectangulo A G D; & in linea M O pars R O, cuius quadratum sit æquale rectangulo M P N; erunt puncta Q, & R, in Parabolâ, cuius vertex punctum L, diameter L F, & ordinatim applicatæ R O, & Q F. Quare circuli, qui fient ex reuolutione parabolæ circa axem L F, æquales erunt excessibus circulorum in trunco coni A B C D supra circulos in Cono G E H. Quadratum enim M O æquale est quadratis R O & P O: Igitur & circulus ex radio 20. Primi Appollonij.



M O, aequalis erit duobus circulis ex radijs R O & P O factis; quod igitur factum est ex P O aequale est ei quod fit ex parte M R; & sic in caeteris omnibus sectionibus, & partibus, vbicunque secari continget. Quare excessus Trunci Coni A B C D supra Conum G E H, aequalis est Frusto Conoidis Parabolici, cuius vertex est punctum L, extra Truncum Coni A B C D. Quod primo demonstrandum erat.

Lemma ante 7. huius.

Quod autem lineae A B, C D, sint tangentes eiusdem Parabolae sic probatur. Cùm enim linea S K sit parallela B E, & inter easdem parallelas lineas A B, & G K; erit etiam aequalis B E. Sed B C dupla est B E; igitur & dupla S K; quare etiam B I dupla est S I; & E I dupla I L: Cùm igitur B E ordinatim applicata sit diametro L E, & S L parallela tangens Parabolam in vertice L, & I L aequalis diametro L E; linea ducta a puncto I ad B, per conuersum 35. libri 1. Appollonij erit tangens Parabolae. Linea verò A B I est linea recta, quare A B linea, tanget etiam Parabolam in eodem puncto B; & sic etiam linea D C; quod demonstrandum erat.

COROLLARIVM.

Hinc deducitur quod excessus Trunci Coni ABCD supra frustum Conoidis Parabolici QRBCT sit æqualis Cono GEH.

Et si concipiatur triangulum BIC vnà cum Parabolâ BLC inscriptâ, reuolui circa axem IE, vnde facti sint Conus & Conoides Parabolicum; quod Conus ille (cuius axis duplus est axis Conoidis Parabolici) sit eiusdem Conoidis Parabolici sesquitertius.

Cum enim Conus SIK sit æqualis Cono ex eâdem basi & circa axem LE; erit etiam æqualis excessui Trunci supra Conoide Parabolicum BIC; sed totus Conus BIC octuplus est Coni SIK. Conoides igitur Parabolicum est sex earum partium quarum Conus BIC est octo; & ideo sesquitertius est Conus BIC Conoidis Parabolici BLC.

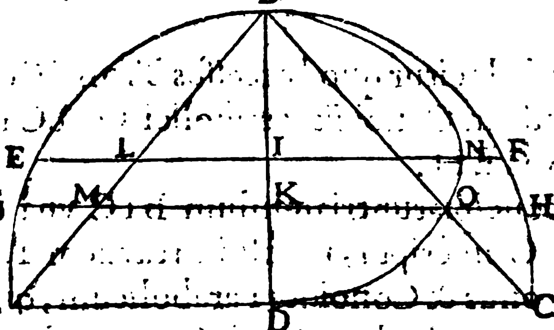
Excessus Trunci supra frustũ Cono. Parab. æqualis Cono

Conus cuius axis duplus est axis Conoidis Parabolici in eodem cono inscripti, est sesquitertius ipsius Conoidis Parabolici.

PROPOSITIO XXXXI.

Excessus cuiuscunque Portionis Sphæræ supra Conum suum æqualis est sphæroidi cuidam lato circa axem eiusdem Portionis constituto.

Sit enim Portio Sphæræ ABC, cuius basis AC, axis vero BD; & super eâdem basi & circa eun-



dem axem constituatur Conus ABC; quae omnia secentur utcunque duobus planis basi AC parallelis, quae sint EF, & GH, secantia etiam axem BD in I & K. Secentur iterum omnia plano per axem; & in latere AB sint puncta L & M intersectiones linearum EF & GH cum eodem latere AB. Dico rectangulum ELF ad rectangulum GMH, esse sicut rectangulum DIB ad rectangulum DKB.

Quoniam enim est sicut DI ad IB ita AL ad LB; & sicut DK ad KB, ita AM ad MB; erit rectangulum DIB ad rectangulum DKB, sicut rectangulum ALB ad rectangulum AMB; componuntur enim ex rationibus, scilicet ex ratione DI ad DK, & IB ad KB, & ex ratione AL ad AM, & LB ad MB; DI vero ad DK est eadem quae AL ad AM, & IB ad KB est eadem quae LB ad MB. Sed rectangulo ALB aequale est rectangulum ELF; & rectangulo AMB aequale rectangulum GMH; eadem igitur est ratio rectanguli DIB, ad rectangulum DKB, quae rectanguli ELF ad rectangulum GMH; & sic erit per to-

tam Portionem A B C vbicunque secta fuerit portio A B C lineis ad basim A C parallelis; quia omnia re-ctangula ex segmentis parallelarum facta per interse-ctionem lineæ A B, inter se erunt in eâdem ratione, quâ sunt rectangula ex segmentis axium vicissim sum-ptis, sicut a parallelis eisdem intersectus erit axis B D. Sed rectangulum G M H vnà cum quadrato M K, æquale est quadrato G K, & rectangulum E L F vnà cum quadrato L I æquale est quadrato E I; & sic sem-per per totam portionem A B C, vbicunque secta fue-rit portio lineis ad basim A C parallelis; quadratum vero G K est ad quadratum M K, sicut circulus ex ra-dio G K ad circulum ex radio M K; & quadratum E I ad quadratum L I sicut circulus ex radio E I ad circu-lum ex radio L I; quare rectangula G M H & E L F, (quæ cùm sint excessus quadratorum G K & E I supra quadrata M K & L I,) sunt proportionalia excessibus circulorum ex radijs G K & E I, supra circulos ex ra-dijs M K & L I factos.

Fiat igitur quadratum L N æquale rectangulo E L F & quadratum K O æquale rectangulo G M O. Dico iam puncta N, & O, esse in Ellipsi, cuius axis vel dia-meter minor est linea B D; sunt enim quadrata K O, & I N in eâdem ratione, quâ sunt rectangula D K B, & D I B; & ideo cùm sint ordinatim applicatæ diame-tro B D, erunt in sectione puncta N & O; & propter-rea si ducta fuerit semiellipsis circa diametrum B D, transiens per puncta N & O, (sicut a Mydorgio libro secundo Conicorum docemur,) & omnia circa axem B D reuoluantur; facta erit Portio Sphæræ A B C vnà 21. primi Apollonij.

cum

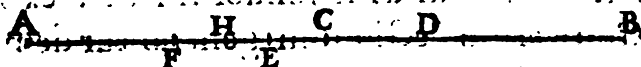
cum Cono A B C, & Sphæroide lato B N O D; Quamobrem, cum omnes circuli in illo facti per sectionem cuiusuis Plani basi A C paralleli, sint semper æquales excessibus Circulorum factorum in portione supra circulos in Cono factos per eiusdem plani interfectionem, necessario sequitur idem sphæroides æquale esse excessui Portionis Sphæræ A B C supra Conum A B C; quod primo erat demonstrandum.

Quòd autem diameter B D sit semper in omni portione minor, sic manifestabitur; & apparebit quod diameter altera erit semper æqualis lineæ A B. Supponatur enim quòd linea A B secta sit bifariam a lineâ G H, in puncto M; vnde rectangulum A M B foret maximum omnium, quæ ex segmentis eiusdem A B possit fieri; quare etiam rectangulum G M H erit maximum omnium, quæ ex segmentis linearum parallelarum basi A C fient. Sed rectangulum G M H, cùm sit æquale rectangulo A M B, est æquale quadrato dimidiæ A B. Quare diameter quæ per dimidiam diametri B D, vel lineæ A B transibit, erit æqualis toti A B; quæ maior semper erit in omni portione Sphæræ quam diameter BD; subtendit enim angulum rectum A D B. Minor igitur est diameter BD reliquâ, quæ per dimidiam B D transibit: & ideo Sphæroides erit latum, quod ex reuolutione Ellypsis circa minorem diametrum B D factum est. Quod etiam demonstrandum erat.

Præ-

Præmiſsis tractationibus de inſcriptione & circumſcriptione Cylindrorum in Truncis Conorum, nec non de comparatione exceſſuum eorum (vbi etiam æqualitatem quorundam ſolidorum quæ ex reuolutione Conicarum Sectionum generantur demonſtrauimus) iam ordine & naturâ conſequens occurrit, vt de Inſcriptione & Circumſcriptione ſolidorum eorundem instituatur diſquiſitio; ſcilicet de maximis inſcriptibilibus & minimis circumſcribentibus; quæ quoniã a nullo (quod ſciam) hactenus tractata eſt, cum tamen ab excellentiſſimo & eruditiſſimo viro D. Michaele Angelo Riccio aliqua huic ſpeculationi inſeruientia acceperim, quibus incitatus, ad ampliorem huiuſce materiæ ſpeculationem in gratiam ſtudioſorum excolendam incubui, & ſequentes propoſitiones præſenti negotio accommodas nec iniucundas (vt arbitror) conſtruxi. Et quoniam ſolidorum Inſpectionis ratio eſt eadem in conis & Cylindris, quæ in Pyramidibus & Parallelepipedis; ſcilicet quòd ſicut Parallelepipeda ſunt tripla Pyramidum, quæ ſuper eâdem baſi & in eâdem altitudine ſunt, ita & Cylindri ſunt tripli Conorum; & omnia ſolida in triplicatâ ratione laterum, vel linearum homologarum, exordiuim ſumam a ſectione lineæ rectæ, & oſtendam quòd maximum ſolidum quod fit ex ſegmentis cuiuſuis rectæ lineæ, eſt quando linea ſecta ſit vt maius ſegmẽtum ſit duplum minoris; tunc enim ſolidum, quod fit a quadrato maioris ſegmenti pro baſi, & minore ſegmento pro altitudine, eſt maximum ſolidum quod fieri poterit ex ſegmentis eiuſdem rectæ lineæ. Præmittatur igitur.

LEMMA.



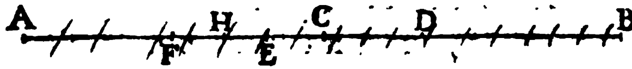
Sit recta AB secta bifariam in puncto C, & iterum in punctis H, & D, trifariam, & sumatur vtcunque punctum E, quod iam ponamus in partem HD cadere, (tres enim sunt casus; scilicet vel quando assumptum punctum cadit intra terminos lineæ HD, vel extra eos, vel in alterutrum horum punctorum H vel D) & fiat sicut AD ad AE, ita AE ad AF; & erit sicut AD ad AE, ita DE ad EF. Dico rectangulum FEB maius esse duobus rectangulis CED, CDE.

Quoniam enim CE minor est quam CD; CD vero dimidia DB; erunt CD, CE simul sumptæ minores DB, & ideo rectangula CDE, CED minora rectangulo EDB. Sed cum sit FE ad ED, sicut AE ad AD; erit rectangulum ex AD in FE, æquale rectangulo ex AE in ED. Rectangulum vero FEB, est ad rectangulum ex FE in AD propter communem altitudinem FE, sicut EB ad AD, & rectangulum AED (æquale rectangulo FE, AD) est ad rectangulum EDB, ob communem altitudinem ED, sicut AE ad DB. Quare proportio rectanguli FEB, ad rectangulum EDB, composita est ex proportione EB ad AD, & AE ad DB; hoc est sicut rectangulum AEB ad rectangulum ADB. Sed rectangulum AEB vnà cum quadrato EC, æquale est rectangulo ADB

vnà

vnà cum quadrato D C; quanto ergo rectangulum A E B excedit rectangulum A D B tanto quadratum D C excedit quadratum E C. Excessus vero quadrati DC vel H C, supra quadratum E C, sunt duo rectangula C E H & C H E; Eadem igitur æqualia sunt excessui rectanguli A E B supra rectangulum A D B. Sed iam monstrauimus, quod rectangulum F E B sit ad rectangulum E D B, sicut rectangulum A E B ad rectangulum A D B, scilicet maius; ac etiam quod rectangulum E D B sit maius duobus rectangulis C E D & C D E; & propterea multo maius rectangulis C E H & C H E. Multo igitur maius erit rectangulum FEB duobus rectangulis C E H & C H E.

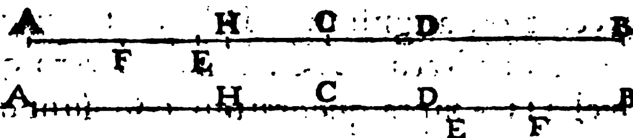
Dummodo cadat punctum E inter C & H: si vero cadat punctũ E inter C, & D erunt rectangula C B D, & C D E.



Hic ponenda est figura prior pag. 116

Si vero ceciderit punctum E in ipsum H punctum; tunc rectangulum F E B æquale erit duobus rectangulis C E D, & C D E; quoniam ob communem altitudinem E D, & æqualitatem linearum E D & D B, erunt duo rectangula C E D & C D E æqualia rectangulo E D B: rectangula etiam A E B & A D B, æqualia erunt; quare et iam rectangulum F E B æquale erit rectangulo E D B, & ideo duobus rectangulis C E D C D E. Sed si cadat punctum E in D, non datur aliud punctum F, nec rectangulum F E B; vnde nulla potest esse inæqualitas vel differentia.

Cadat demum extra lineam H D, vel in partem A H, vel D B; Dico rectangulum F E B, minus esse



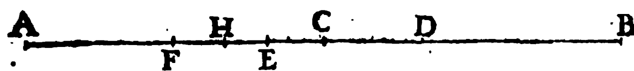
duobus rectangulis CDE & CED. Cùm enim rectangulum AEB sit minus rectangulo ADB, ob maiorem distantiam puncti E, a puncto C; erit ex prius demonstratis rectangulum FEB minus rectangulo EDB. Sed rectangulum EDB est minus duobus rectangulis CDE & CED; habent enim communẽ altitudinem ED; & minor est linea DB, quàm composita ex duabus CD & CE. Multo igitur minus est rectangulum FEB, quàm sunt duo rectangula CED, & CDE simul. Quod demonstrandum erat.

Est enim in ratione rectanguli AEB ad rectangulum ADB

Notandum est, quòd ita sumi potest punctum E in lineâ DB, vt tertia proportionalis AF sit maior lineâ AB; & sic punctum F cadet vltra punctum B. Sed hoc supposito nihil mutatur ratio demonstrationis, quemadmodum intuenti facile apparebit.

PROPOSITIO XXXXII.

Si recta linea secta fuerit vt sit pars maior dupla reliquæ, solidum quod fit ex quadrato segmenti maioris in reliquum, maximum est omnium solidorum quæ fieri possint ex quibuslibet segmentis eiusdem rectæ.



Sicut in præcedente Lemmate tres casus occurrunt, ita in hoc Theoremate conformiter variatur demonstratio, vti mox patebit. Sit igitur recta A B secta in puncto D, vt sit A D dupla D B. Dico solidum ex quadrato A D in D B, esse maximum quod fieri possit ex quibuslibet segmentis eiusdem rectæ A B: Diuidatur enim bifariam in puncto C, & iterum in H, vt sit AH æqualis H D vel D B, & si fieri potest sit punctum E, in quo linea A B secta faciet solidum ex quadrato A E in E B rectam; maius solido ex quadrato A D in D B; Et primò sit punctum E in parte H D.

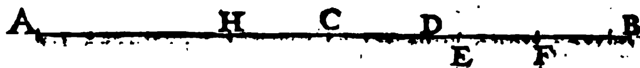
Et quoniam solida sunt ad inuicem in ratione compositâ ex basibus & altitudinibus; erunt hæc composita ex quadrato A D ad quadratum A E, & lineâ D B ad lineam E B: Fiat igitur sicut A D ad A E, ita A E ad A F; quadratum igitur A D ad quadratum A E, est sicut linea A D ad lineam A F; quare proportio istorum solidorum componitur ex rationibus A D ad A F, & D B ad E B; & ideo sunt in ratione rectangulorum A D B, & A F E B. Sed rectangulum ex AFEB minus est rectangulo A E B quantitate rectanguli FEB; rectangulum vero A E B vnà cum quadrato EC, æquale est rectangulo A D B vnà cum quadrato D C: quantò ergo rectangulum AEB excedit rectangulum ADB, tanto quadratum C D excedit quadratum C E; Excessus verò quadrati CD supra quadratum CE, est æquale duobus rectangulis C E D, & C D E (puncto E exi-

ſtente inter C & D; exiſtente vero inter C & H, erit exceſſus æqualis duobus rectangulis CEH & CHE; & ſi in ipſum punctum C ceciderit, non eſt quod excedat quadratum CD, ſed rectangulum FEB maius eſt duplo quadrato CD, ſcilicet rectangulo EDB; quę demonſtrata ſunt per præcedens lemma minora eſſe rectangulo FEB. Rectangulum igitur AEB excedit rectangulum ADB minori exceſſu quàm excedit rectangulum AFEB; ac proptcrea Rectangulum ADB maius eſt rectangulo AFEB; & ideo ſolidum quod fit ex quadrato AD in DB lineam, maius eſt eo, quod fit ex quadrato AE in EB; quod primo demonſtrandum erat.

Demonſtratur in lemmate præcedente.



Si vero fuerit punctum E idem cum puncto H, manifeſtum eſt quod rectangulum ex AFEB erit dimidium rectanguli ADB, & ideo ſolidum ex quadrato AE in rectam EB; erit ad ſolidum ex quadrato AD in DB, in eâdem ratione, ſcilicet dimidium: & ſic ſemper minus quanto propinquius fuerit ſecta ad terminum A,



Sit denique punctum E in parte DB, & ſupponatur quòd ſolidum ex quadrato AE in rectam EB, maius ſit vel æquale ſolido ex quadrato AD in DB; & fiat ſicut AD ad AE ita AE ad AF; & ex demõſtratis in lem-

mate

mate erit solidum ex quadrato A D in D B, ad solidum ex quadrato A E in E B, sicut rectangulum A D B ad rectangulum ex A F in E B; sed rectangulum A E B minus est rectangulo ex A F in E B, quantitate rectanguli F E B; minus vero rectangulo A D B, quantitate duorum rectangulorum C D E & C E D; sed demonstrauimus, quòd rectangulum F E B minus sit duobus rectangulis C D E, C E D; quare maior est excessus rectanguli A D B supra rectangulum AEB, quam rectanguli A F E B supra idem rectangulum A E B. Rectangulum igitur A D B maius est rectangulo AF-E B; & ideo solidum ex quadrato A D in D B, maius solido ex quadrato A E in E B, quod demonstrandum erat. Maximum igitur est solidum quòd fit ex quadrato A D in D B, omnium quæ fieri possunt ex segmentis eiusdem rectæ A B; quod demonstrare oportuit.

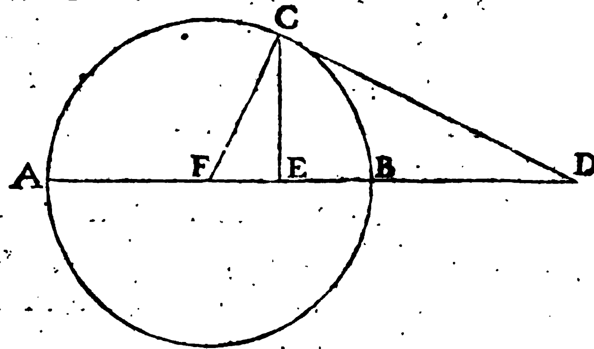
COROLLARIUM.

Liquido etiam constat ex præmissis, quòd quo propius sectio fiet in lineâ A B ad punctum D, modo sectiones sint in eâdem parte lineæ, eo maius erit solidum ex illis segmentis factum.

PROPOSITIO XXXXIII.

Si circulum tangens recta linea cum diametro productâ conueniat, & a puncto contactus ad diametrum demittatur per

pendicularis; diameter ita diuidetur a perpendiculari, vt sit pars maior ad minorem, sicut tota cum productâ ad productam.



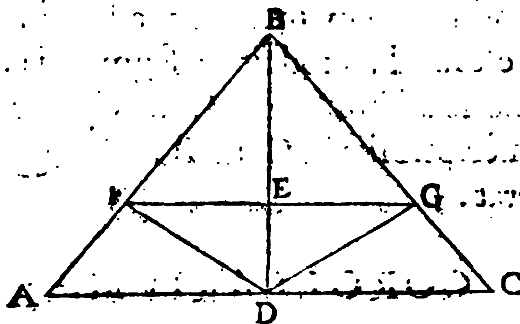
Sit enim Circulus A C B, quem tangat linea C D in puncto C, conueniens cum diametro A B productâ in puncto D, & a C puncto in diametrum A B demittatur perpendicularis C E. Dico sicut A D ad D B ita esse A E ad E B.

Ducatur enim a centro F ad punctum C contactûs linea F C; & quoniam angulus F C D est rectus, si super diametro F D describatur circulus, transibit per punctum C, & ideo quadratum C E æquale erit rectangulo F E D. Est etiam idem quadratum E C æquale rectangulo A E B; quare sicut D E ad E B, ita A E ad E F; & diuidendo sicut D B ad B E, ita A F ad F E; & permutando sicut D B ad A F, ita B E ad F E; & ad consequentium dupla sicut D B ad B A, ita B E ad duplam E F; & componendo sicut D A ad A B, ita

BE cum duplâ EF (hoc est AE) ad duplam EF, & per conuersionem rationis sicut DA ad DB, ita AE ad excessum suum supra duplam EF, hoc est EB. Est igitur sicut AD ad DB, ita AE ad EB, quod erat propositum demonstrare.

PROPOSITIO XXXXIV.

Maximus conus qui poterit inscribi in quocunque Cono est, quando basis inscripti diuidit axem circumscribentis, ita vt segmentum ad verticem sit duplum reliqui.



Esto enim Conus ABC, cuius axis BD secetur in puncto E, vt sit pars BE dupla partis ED, & per punctum E transeat planum basi AC parallelum, faciens in Cono ABC circulum FG, qui sit basis Coni inscripti FDG. Dico Conum inscriptum FDG esse maximum, qui poterit inscribi Cono ABC.

Quoniam enim ratio Coni ABC ad Conum FDG,

componitur ex ratione basis A C ad basim F G, & altitudinis B D ad altitudinem E D; basis verò A C est ad basim F G in duplicatâ ratione radiorum suorum A D & F E, vel B D ad B E, hoc est sicut quadratum B D ad quadratum B E; altitudines vero sunt lineæ B D & D E. Ratio igitur Coni A B C ad Conum F D G, componitur ex quadrato B D, ad quadratum B E, & lineâ B D ad lineam E D; sed quadratum B D in B D facit Cubum ex B D; & quadratum B E in E D facit maximum solidum, quod ex segmentis eiusdem B D fieri potest; & propterea conus F D G (cum sit compositus ex iisdem rationibus) est maximus conus qui poterit inscribi in Cono A B C. Omnes enim coni vtcunque inscripti habent rationem compositam ex segmentis axis B D: sicut solida, quæ fiunt ex quadratis partis ad verticem in partem ad basim; quorum maximum est illud, quod fit ex segmentis, quæ sunt in dupla ratione ad inuicem. Conus igitur F D G est maximus inscriptibilis in Cono A B C. Quod demonstrandum erat.

42. huius.

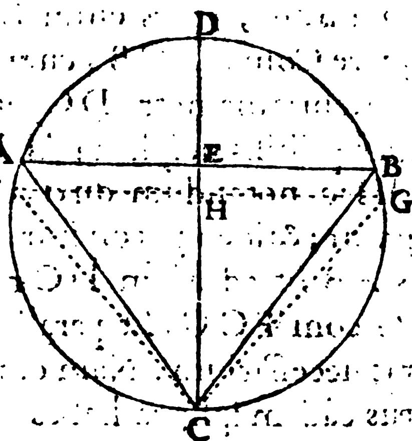
COROLLARIVM.

Euidens est ex demonstratis, quòd Conus A B C sit minimus, qui circumscribere possit Conum F D G. Si enim non fuerit minimus, foret alius, cuius axis vel maior vel minor esset axe B D; quo supposito pars B E non foret dupla E D; & sic sequeretur absurdum.

PRO-

PROPOSITIO XXXXV.

Maximus in sphærâ inscriptus Conus, est, qui habet axem suum duplum reliquæ partis axis sphæræ.



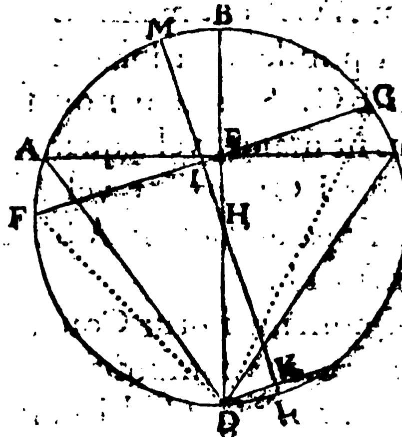
Sit sphæra ADBC, cuius axis DC diuisus sit a puncto E, vt sit CE dupla DE, & per E transeat planum AB ad axem rectum, secās sphæram ADBC, faciensque in eâ circulum qui basis sit Coni ACB. Dico conum ACB esse maximū inscriptibilem in sphærâ ADBC. Si autem non sit maximus, oportet quod alius sit maior, vel æqualis. Sit igitur (si fieri potest) Conus FCG maior vel saltem æqualis; cuius basis FG sit parallela basi AB, & secet diametrum DC in puncto H.

Quoniam igitur Conus ACB ad Conum FCG, est in ratione composita ex base AB ad basim FG, & altitudine EC ad altitudinem HC; bases verò sunt sicut quadrata radiorum suorum, hoc est sicut rectangulum CED ad rectangulum CHD; composita igitur est ratio Coni ACB ad Conum FCG, ex ratione

rectanguli CED ad rectangulum CHD, & lineæ EC ad lineam HC; hoc est sicut solidum ex CED in EC, ad solidum ex CHD in HC. Sed solidum ex CED in EC, idem est ac solidum ex quadrato CE in ED; & solidum ex CHD in HC, est solidum ex quadrato HC in HD. Sed iam demonstratum est, quòd solidum ex quadrato EC in ED, sit omnium, quæ fieri poterunt ex segmentis eiusdem lineæ CD, maximum, (pars enim EC est dupla partis ED.) Quare Conus ACB (cum omnes sint sicut solida ex segmentis diametri DC facti) est omnium maximus inscriptibilis in sphæra ADBC; quod erat propositum.

42. huius.

Hic notandum duxi, quòd solum de conis rectis agatur; & ideo præcipitur in constructione, quòd basis AB sit ad axem DC recta; ac etiam quòd basis FG coni FCG, sit parallela basi AB; etiamsi non erat necessarium. Nam omnis Conus Scalenus inscriptus eâdem sphæra habēs verticem C, erit minor cono recto maximo ACB. Quod sic demonstrabitur. Sit enim sphæra ABCD, cuius axis BD, in quâ inscribatur Conus maximus ADC, cuius axis ED; & concipiatur in eâdē sphærâ inscriptus conus Scalenus FDG, cuius idem vertex D, centrum basis I, per quod transeat diameter sphæræ LHIM. Dico Conum scalenum



FDG

F D G minorem esse cono recto A D C. Ducatur igitur per D verticem, planum parallelum basi coni F D G, secans diametrum M L in puncto K. Et supponatur quod super basi F G & in altitudine I L, constitutus fuerit conus rectus, qui cum sit in eâdem sphærâ, non potest esse maior cono A D C; sed conus F D G, erit minor cono illo cùm consistat super eâdem basi F G, & in minore altitudine, scilicet I K. Minor igitur est conus Scalenus F D G cono recto A D C, quod erat demonstrandum. 11. lib. 12. Euclid.

PROPOSITIO XXXXVI.

Si conus circumscribens Sphæram tangat basim maximi Coni in eadem inscripti, erit ille Conus Minimus circumscriptibilis circa eandem sphæram.

SIt circulus A D B C, cuius diameter C D diuisa in I, vt sit C I dupla I D, & ab I puncto erecta sit perpendicularis ad diametrum I A, cui parallela ducta sit C H, & in A puncto tangat circulum recta F A E, concurrens cum diametro C D productâ, & cum lineâ C H parallelâ I A in puncto F. Dico conum ex reuolutione trianguli E F C factum circa axem E C, esse minimum circumscriptibilem circa sphæram ex reuolutione circuli A D B C factam.

Quoniam enim linea E A tangit circulum A D B C in puncto A, & a contactu demissa est perpendicula-

ris diametro CD in I, ac etiam cum diametro CD productâ concurrit in E puncto, erit sicut CI ad ID, ita CE ad ED; quare cum (per constructionem) CI sit dupla ID, erit CE dupla ED; & ED vnà cum DI hoc est EI, erit dupla IC. Quare Conus factus ex reuolutione trianguli AIC erit maximus inscriptibilis in Cono ex reuolutione trianguli EFC, cum EI sit dupla IC; ideoque Conus ex reuolutione trianguli EFC factus erit minimus circumscribens conum ex reuolutione trianguli AIC factum.

43. huius.

44. huius.

Supponatur autem quòd non sit minimus circumscriptibilis circa sphæram ex reuolutione circuli ADBC, sed quòd conus tangens sphæram in K puncto foret minor: Ducatur igitur GKH linea tangens circulum ADBC in K puncto; & conueniens cum axe CD producto in G; & cum lineâ HC parallelâ AI in H: Supponatur etiam quòd per A punctum transeat linea LAM, parallela ipsi GKH; & quòd ex reuolutione triangulorum GHC, & LMC, facti sint

duo

duo coni. Manifeſtum eſt iam quòd Conus ex GHC, maior erit cono ex L M C facto. Sed conus factus ex reuolutione trianguli A I C, maximus eſt inſcriptibilis in cono ex reuolutione trianguli E F C; quoniam E I eſt dupla I C; ſecus verò ſe habet ad conum ex reuolutione trianguli L M C, in quo etiam inſcribitur; 44. huius. nam L I linea, vel maior, vel minor, erit lineâ E I, Quare minorem rationem habet Conus ex triangulo A I C, ad conum ex reuolutione L F C, quam ad conum ex reuolutione trianguli E F C. Maior igitur eſt conus ex L M C, quam conus ex E F C; & multò maior erit conus ex reuolutione trianguli G H C, qui tangit ſphæram in K; quam conus ex reuolutione trianguli E F C, qui tangit baſim maximi coni in ſphæra A D B C inſcripti: quod demonſtrandum erat.

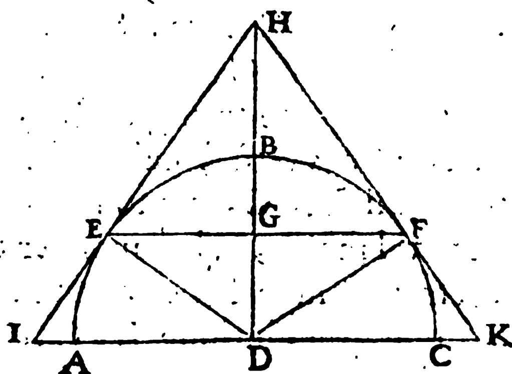
PROPOSITIO XXXXVII.

Hemiſphærio circumſcribere Conum Minimum.

SIt Hemiſpherium A B C, in quo ſit inſcriptus conus maximus E D F, cuius baſis E F ſecet axem hemiſphærij B D in G, vt ſit quadratum B D triplum Per 12. huius. quadrati D G. Sit etiam conus I H K, circumſcribens Hemiſphærium tangenſque ipſum in circulo E F, qui baſis eſt coni Maximi E D F. Dico Conum I H K, eſſe minimum circumſcriptibilem circa Hemiſphærium A B C.

Quoniam enim angulus I E D eſt rectus, erit tri-

angu-



angulum HED simile triangulo EDG; & ideo sicut HD ad DE, ita DE ad DG; & sicut quadratum DE, vel BD, ad quadratum DG, ita linea HD ad lineam GD. Sed quadratum BD est triplum quadrati GD; quare linea HD est tripla lineæ GD, & HG dupla ipsius GD: Igitur & Conus EDF maximus conus inscriptibilis cono HIK. Sed Conus HIK tangit & circumscribit Hemisphærium ABC. Quare per ea quæ in præcedente demonstrata sunt, euidentissimum est, quòd nullus minor conus ipsum circumscribere possit.

44. huius.

COROLLARIVM.

Eadem prorsus est ratio circumscribendi spheroides vel Hemisphæroides, quæ sphæram vel hemispherium. Nam ab Appollonio propositione 34. libri primi demonstratum, est quòd, si recta linea contingat Ellipsim cum diametro productâ conueniens, & a puncto contactûs ordinatim applicetur linea ad diametrum,

ea-

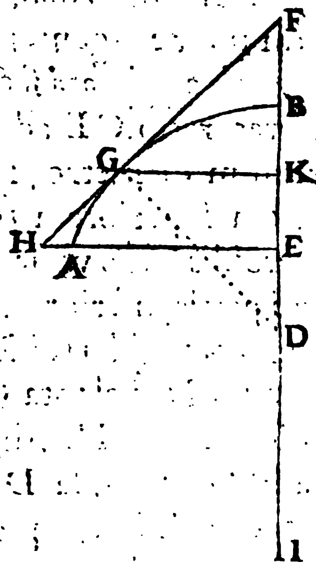
eadem erit ratio diametri productæ ad partem intercę-ptam inter tangentem & sectionem, quæ partium diametri ab applicatâ sectarum, sicut in superiore de sphærâ erat ratio CE ad ED, vt CI ad ID. Sectâ igitur primum diametro (sphæroidis quidem vt sit tota ad partem superiorem tripla sicut CD ad DI, Hemisphæroidis vero vt sit quadratum totius triplum quadrati partis inferioris, quemadmodum BD, GD;) & productâ in sphæroide, donec fiat CE ad ED, sicut CI ad ID; vel tota CE tripla CI; & in Hemisphæroide, sicut in Hemisphærio, donec tota cum productâ HD sit tripla DG; necessarium erit idem esse punctum E in axe producto sphæræ vel sphæroidis, ac etiam in axe Hemisphæroidis vel Hemisphærij producto punctum H; alioqui non foret eadem ratio totius diametri cum productâ ad productam, quæ partium diametri ab applicatâ diuisarum quæ a contactu ducitur; sicut ab Appollonio loco citato demonstratum est.

PROPOSITIO XXXXVIII.

Circa datam Portionem minorem Hemisphærio circumscribere conum Minimum.

Concipiatur factum, & quòd omnia secta sint plano per axem; vnde sit AB dimidium peripheriæ portionis, & HFE dimidium trianguli per axem;

ex sectione coni facti, cuius latus HF contingat peripheriam AB, diuisum a puncto contactus G, vt sit pars FG dupla GH: producta sit iam FE in I, vt sit BI diameter sphæræ, vel circuli cuius AB est portio; & a G ad illam demittatur perpendicularis GK; & ad centrū D linea GD.



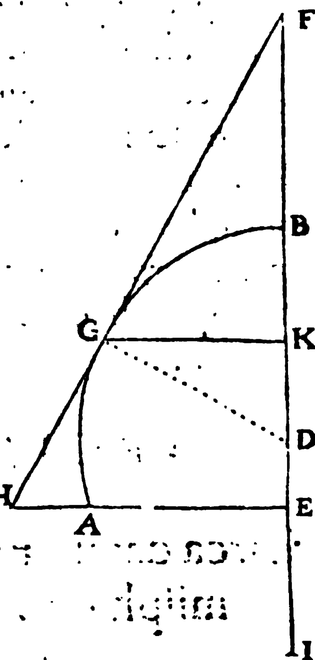
Et quoniam angulus FGD est rectus, circulus super diametro FD transibit per punctum G; vnde manifestum est quod rectãgulum FKD, æquale sit rectangulo IKB; ambo enim æqualia sunt quadrato GK; addito igitur quadrato KD, erit rectangulum FDK æquale quadrato BD: quanto ergo quadratum BD excedit quadratum ED, tanto rectangulum FDK, excedit idem quadratum ED; Sed rectangulum FDK, æquale est rectangulo FDE vnà cum rectangulo ex FD & EK, hoc est rectangulis FEK & DEK; & rectangulum FDE, æquale est rectangulo FED vnà cum quadrato ED; rectangulum verò FED est triplum rectanguli KED, (FE enim tripla est KE). Constat ergo quod quatuor rectangula KED vnà cum rectangulo FEK, æqualia sint excessui rectanguli FDK, vel quadrati BD supra quadratum ED. Notus verò est excessus quadrati BD supra quadratum ED quare reliqua non latebunt.

Applicetur igitur quadruplo E D notæ; rectangulum æquale excessui quadrati B D supra quadratum E D, excedens rectangulo simili rectangulo F E K specie noto; & innotescet linea F E, vnà cum linea E K, scilicet latera rectanguli, quo rectangulum applicatum quadruplæ E D excedit ipsum. Inuento igitur puncto F in axe producto, inuentus est Conus Minimus circumscriptibilis circa portionem datam. Quod faciendum erat. 29.6. Eucl.

PROPOSITIO XLIX.

Circa datam Portionem Maiorem Hemisphærio circumscribere Conum Minimum.

SVpponatur iterum factum, & secta omnia plano per axem; vnde sit A G B dimidium peripheriæ, & F H E dimidium trianguli facti ex sectione coni & portionis per axem; quare linea F H tangens peripheriam in G diuisa erit, vt pars F G sit dupla partis G H; & a G puncto ducta sit ad axem B E perpendicularis G K, & iterum ad centrum D linea G D; & producatur B E in I, vt sit B I diameter circuli cuius pars est peripheria A G B. Manifestum est iam quòd angulus F G D sit rectus, & quòd rectangulum F K D sit æquale rectangulo I K B; ac etiam quòd rectangulum F D K sit æquale quadrato B D. Quantum igitur quadratum B D excedit quadratum D E, tantum rectan- In præcedente 48. probantur.

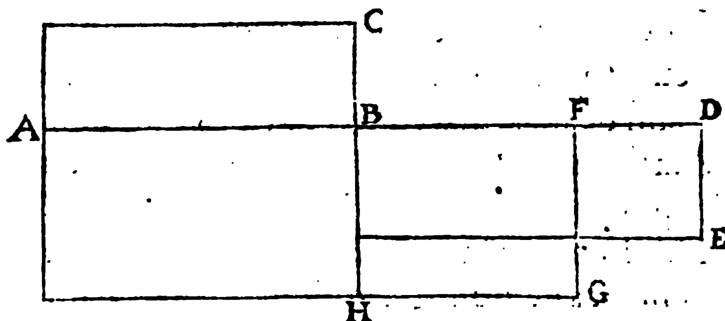


gulum FDK excedit idem quadratum D E. Sed rectangulum FED vnà cum rectangulis FDK & KED simul, æqualia sunt rectangulo FEK vna cum quadrato DE; dempto igitur ex vtroque quadrato DE, erit rectangulum FEK æquale rectangulis FED & KED vnà cum rectangulo FDK, minus quadrato DE; vel (quod idem est) excessui rectanguli FDK, vel quadrati BD supra quadratum DE. Rectangula vero FED, & KED sunt quatuor rectangula KED; FE enim tripla est KE. Quatuor igitur rectangula KED, vnà cum excessu rectanguli FDK vel quadrati BD supra quadratum DE simul, æqualia sunt rectangulo FEK. Fiat igitur linea AB quadrupla DE, super quâ construatur rectangulum AC æquale excessui quadrati BD supra quadratum DE; iam productâ AB quantum opus in D, fiat rectangulum BE æquale rectangulo AC, & simile rectãgulo FEK specie noto; datâ iam BD mediâ proportionali, inueniantur extremæ quarum differentia AB, scilicet AF & BF; & iterum super lineâ AF constituatur rectangulum AG, simile rectangulo BE vel FEK, & productâ CB in H, Dico.

Vide infra in Lemmate ante Prop. 26.

Quoniam rectangulum BE simile est rectangulo AG, erit rectangulum BE ad rectangulum AG, si-

cut



cut quadratum B D ad quadratum A F, hoc est sicut linea B F, ad lineam A F, vel sicut rectangulum B G ad rectangulum A G. Sed rectangulum B E per constructionem æquale est rectangulo A C. Igitur rectangulum B G æquale est eidem rectangulo A C, & æquale excessui quadrati B D supra quadratum D E. Lineæ igitur A B, vel quadruplæ D E productæ, applicatum est rectangulum simile rectangulo F E K excedens rectangulo B G æquali excessui quadrati B D, supra quadratum D E. Vnde necessariò sequitur, quòd rectangulum A H sit æquale quatuor rectangulis KED; Et igitur quòd latus B H, vel F G, sit æquale lineæ K E: Impossibile est enim construere aliud rectangulum simile rectangulo A G & applicatum lineæ A B, cuius excessus sit æqualis rectangulo B G. Inuentum est igitur punctum K, & inde punctum F in axe producto, a quo ducta tangens & producta in concursum cum basi E A productâ in H, erit diuisa in contactu G, vt sit F G dupla G H; vnde inuentus est Conus Minimus circumscribens Portionem sphæræ datam: quod facere oportebat.

Quemadmodum obſeruauimus in Coroll. Prop. 47. quòd eadem erat ratio demonſtrationis de conis minimis circumſcribentibus Sphæroidem, quæ Sphæram; ſicut etiam de maximis inſcriptis; ita nunc obſeruandum duxi eandem eſſe rationem circumſcribendi, & inſcribendi portiones earundem, quæ portiones ſphæræ: Nihil enim aut mutandum aut addendum eſt præcedentibus demonſtrationibus, præterquam quod quando dicitur rectangulum FKD æquale eſſe rectangulo IKB (quia æquale quadrato GK) iam dicendum ſit (propter eandem rationem quam habent ad quadratum GK;) vnde etiam probatur eorum ad inuicem æqualitas: in ſingulis vero reliquis in demonſtratione prolatis, concordat pariter demonſtratio cũ portionibus ſphæroidum, ſicut & ſphæræ.

PROPOSITIO L.

Conoidi Parabolico circumſcribere Conum Minimum.

SIt ſemiparabola ABC, cuius axis CD ſectus ſit bifariam in E puncto, a quo ducta ſit perpendicularis EB concurrens cum ſectione in B: producto iam axe quantum opus, fiat FC æqualis CE, & a puncto F, ad B, ducta ſit recta & producta donec concurrat cum baſi DA productâ in G; ductâ etiam BD, concipiantur reuolui omnia circa axem FD, vnde facta ſint Conoides Parabolicum ex reuolutione ſemi-

para-

parabolæ A B C, & Conus ex reuolutione trianguli FGD, circa axem manentem FD, Manifestum est quod Conus factus ex triangulo FGD, tangat Conoides Parabolicũ factum ex reuolutione semiparabolæ A B C: linea enim F B propter æqualitatẽ linearum F C & C E, & ordinatim applicatam B E, tangit sectionem A B C in B puncto; & quoniam F B est dupla B G, erit Conus ex F G D factus, minimus circumscribens conum ex B D E factum. Quare ex demonstratis sequitur, quod F G D minimus sit circumscriptibilis, & quòd Conus ex BDE sit Maximus inscriptibilis in eodem Conoide Parabolico. Quod &c.

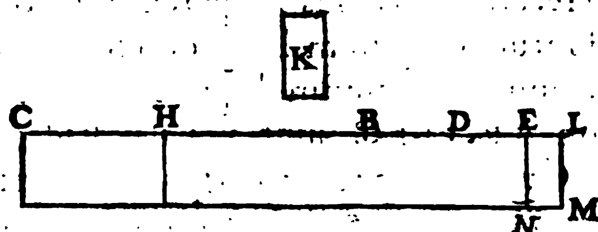
Per 35. lib. 1. Appollonij.

PROPOSITIO LI.

Conoidi Hyperbolico circumscribere Conum Minimum.

SIt Semihyperbola A B cuius axis BC, transuersa diameter B I, & centrum E; ducta autem sit tangens D F G, quæ tangat sectionem in F, vt sit pars D F dupla partis F G; (quomodo autem hoc fiat mox apparebit:) ab F autem sit ordinatim applicata F H;

Et quoniam DF est dupla FG, erit etiam DH dupla HC. Cum igitur per 36. lib. 1. Appollonij sit sicut ID ad DB, ita IH ad HB, propter ordinatim applicatam FH a contactu ad diametrum BC; erit componendo sicut IB ad BD, ita IH & HB tanquam vna ad HB; & antecedentium dimidia, sicut EB ad BD, ita EH ad HB; & per conuersionem rationis sicut EB ad ED, ita EH ad EB; & inuertendo sicut ED ad EB, ita EB ad EH; quare EB est media proportionalis inter EH & ED. Cum igitur notæ sint rectæ CE, & EB, cuius quadrato æquale est rectangulum HED; Applicetur ad datam CE, rectangulum æquale quadrato EB, vnà cum dimidiā eiusdem, excedens rectangulo simili rectangulo cuidam K, similiterque posito, (cuius latus maius sit duplum minoris) quod sit CM, cuius excessus EM sit rectangulum simile rectangulo K; Inuento iam lateri LM fiat ED æqualis, & tertia pars CD sit CH. & BE media proportionalis inter HE & ED: Quoniam igitur rectangulum CM æquale est quadrato BE vnà cum dimidio eiusdem, hoc est in ratione sesquialtera; & latus CI est sesquialterum lateris vel lineæ HE (est enim HD dupla CH, & DE dupla



EL; & composita igitur ex HD DE dupla compositæ ex CH & EL.) Rectangulum igitur CM, sesquialterum est rectanguli HN, vel quadrati BE: Inuenta igitur sunt in lineâ CE nota puncta H & D: vnde manifeste apparet quòd tangens, ducta a puncto D in transuersâ diametro, ad basim CA sectionis productam in G, tanget sectionem in F, vt sit pars DF dupla partis FG. Si igitur conuertantur circa axem DG triangulum DGC, & semihyperbola BA, facta erunt Conoides Hyperbolicum, & Conus Minimus circumscriptibilis circa ipsum; & si ab F ducta fuerit linea FC, ex reuolutione trianguli FHC fiet etiam Conus Maximus inscriptibilis in eodem Conoide Hyperbolico, quemadmodum ex supra demonstratis manifestè apparet.

Finitis iam quantum opus de inscriptione, & circumscriptione Conorum circa solida rotunda, vel in solidis rotundis, ex reuolutione curuarum, siue ex circulis, vel ex coni sectionibus genitis, iam consequens videtur aliquid de circumscriptione & inscriptione eorundem solidorum in conis & circa conos demonstrare; in quibus ob facilitatem breuis esse conabor: Primò igitur notandum est, quod minimus conus circumscribens sphæram sit conus factus ex reuolutione

trian-

trianguli rectanguli, cuius Hypotenusa est tripla basis: quod intuenti figuram Prop. de circumscribendo sphæræ Conum Minimum liquide apparebit; in figura enim AF, & FC, sunt æquales & ideo EF tripla FC. Quare maior est ratio sphæræ inscriptæ tali cono, quàm cuicunque alio. Conorum verò inscriptorum in sphærâ maximus est ex triangulo, cuius laterum quadrata sunt in ratione sicut 1. 2. & 3. hoc est in ratione laterum Cubi & Pyramidis in sphærâ inscriptorum & diametri eiusdem sphæræ; quæ etiam est ratio laterum trianguli genetricis maximi coni inscripti Hemisphærio, sicut ad propositionem 13. adnotauimus; Quare si conus factus ex triangulo, cuius latera non sint in illa ratione, vel inscripti sphæræ vel Hemisphærio; tunc sphæra vel Hemisphærium illis circumscribens non erit Minimum, sed sphæroides vel hemisphæroides aliquod erit minus. Quamuis autem in omni cono recto inscribi poterit vel Sphæra, vel Hemisphærium, vel Portio quæuis alia sphæræ; attamen quilibet conus proprietatem habet peculiarem ad inscribendas portiones sphærarum; hoc est vt cuilibet portioni conueniat Conus Proprius, qui inscribendis portionibus minorem rationem habeat quouis alio, circumscribendis vero portionibus omni alio maiorem; & ideo vocari potest Conus Proprius.

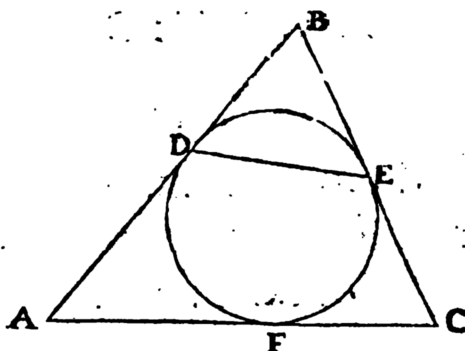
46 huius

quoniam sunt tangentes.

Conus proprius minor est omni alio cono circumscribente eandé portionem.

Obseruandum etiam duxi quòd cono Scaleno inscribi non possit sphæra, quod sic demonstrabitur. Supponatur enim si fieri potest, quod in cono Scaleno ABC, inscripta fuerit sphæra DEF, & secentur ambo plano per axem iuxta maximam & minimam lineam

in su-

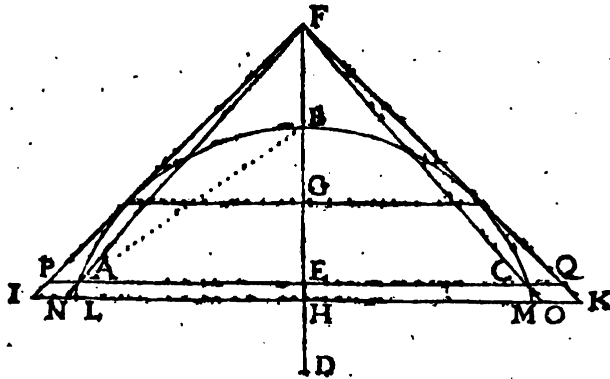


in superficie Coni, vnde facta sint triangulum ABC, & circulus DEF. Latera igitur AB & BC trianguli ABC, tangunt circulum DEF, in punctis D & E, quæ connectantur linea DE; & quoniam linea DE, in sphærâ erat diameter circuli, vtpote secta plano per lineam DE ad triangulum ABC per axem recto; quare etiam in cono ABC ex eâdem sectione per lineam DE fit circulus (oportet enim quod circumscriptus conus tangat inscriptam sphæram per circulum.) Sectio igitur cum sit circulus, est subcontraria basi AC, & latera trianguli DBE, scilicet DB ad BE, sicut CB ad BA trianguli ABC; quare latus BE maius est latere BD. Sed sunt æquales, propterea quòd tangant circulum DEF, ductæ ab eodem puncto B; quare suppositio falsa est, & Sphæra non potest inscribi Cono Scaleno, ita vt tangat illum in circulo sicut propositum erat.

Apoll. Conic, lib. 1. prop. 5.

PROPOSITIO LII.

Minor portio sphæræ maiorem rationem habet ad Conum suum Proprium circumscribentem quam Maior ad suum.



SIt Portio Sphæræ ABC cuius centrum D, axis BE productus in F, vt sit FB ad BE, sicut quadratum ex AB ad duplum quadrati ex AE, & circa axem FE & super basi portionis AC fiat conus AFC; qui propterea æqualis est Portioni ABC; & quoniam ex ijs quæ iam demonstrauimus (diuisâ BE bifarium in G) est sicut FD ad BD, ita BD ad GD, erit FB maior quam BG. Diuidatur itaque bifariam FG, & æqualis dimidiæ fiat GH; quare FG est dupla GH. Per H iam agatur planum parallelum basi AC, & circa axem FH & super eodem plano constituatur conus IFK, tangens portionem ABC, quæ produca-

Per 2. partem Coro. 30. huius.

In 30. huius.

tur

tur vſque ad planum I K, in L, & M, & conis A F C in N, & O, in eodem plano: Quoniam enim eſt ſicut F D ad B D, ita B D ad G D; & ita F B ad B G; erit componendo ſimul F D & B D, ad B D & G D, ſimul; ſicut F B ad B G; quare ſi planum baſi parallelum tranſibit per G punctum, interſecabit in contactu Conum I F K cum portione L B M, & ſecabit latera eius in eâdem ratione qua axis F H in puncto G; ſcilicet vt pars ad verticem ſit dupla reliquæ ad baſim; vnde manifeſtum eſt quod conus I F K ſit minimus circumſcriptibilis, vel conus proprius Portionis LBM. Producatur etiam planum A C ad interſectionem coni I F K in P & Q, & Conus A F C producatur ad planum I K, & fiat Conus N F O. Per 43. & 48. & 49. huius.

Quoniam igitur conus A F C eſt æqualis portioni A B C, & ad Conum P F Q, habet rationem quadrati A E ad quadratum P E; Portio A B C ad eundem conum P F Q habet eandem rationem quadrati A E ad quadratum P E; Conus vero N F O ad conum I F K eandem rationem habet, quam Portio A B C ad conum P F Q, (eſt enim N H ad I H, ſicut A E ad P E.) Sed conus N F O maior eſt portione L B M, quoniam maius eſt incrementum ſolidi contenti inter plana A C & N O in Cono quàm in portione; Maior enim eſt baſis N O quam L M; & ideo maiorem rationem habet conus N F O, ad conum I F K; quàm habet portio L B M ad eundem conum I F K. Sed ſicut conus N F O ad conum I F K; ita eſt portio A B C ad conum P F Q; Maiorem igitur rationem habet minor portio A B C ad conum P F Q, quàm maior portio L B M,

ad Conum ſuum proprium circumſcriptum I F K, qui minimus eſt circumſcriptibilis circa eam. Sed Conus P F Q non eſt conus Proprius portionis A B C; & ideo maior eſt cono proprio; multo igitur maiorem rationem habet Minor Portio A B C ad conum ſuum Proprium, quam habet Maior portio L B M ad Conum ſuum Proprium I F K, quod erat propoſitum demonſtare.

COROLLARIVM.

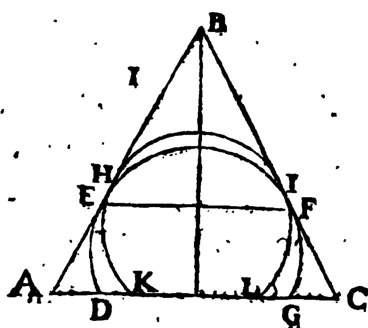
Ex hoc colligitur, quod ſicut in Minoribus Portionibus, maior eſt ratio portionis ad Conum Proprium circumſcribentem, ita ad Maximos Conos inſcriptos maiorem etiam rationem habebunt Minores Portiones, quàm Maiores.

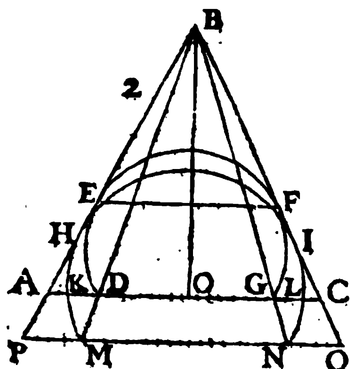
Notandum etiam eſt, quòd tota hæc demonſtratio de proportione portionum Sphærarum ad conos ſuos proprios conueniat etiam ad demonſtrandam proportionem, quæ habetur in portionibus Sphæroidum, ſcilicet quòd minor portio ſphæroidis ad conum ſuum Proprium maiorem rationem habeat quam maior ad ſuum.

PROPOSITIO LIII.

Cuicunque Cono recto cuius trianguli genitricis Hypotenuſa non ſit maior quàm tripla baſis, inſcribere Sphæram vel por-

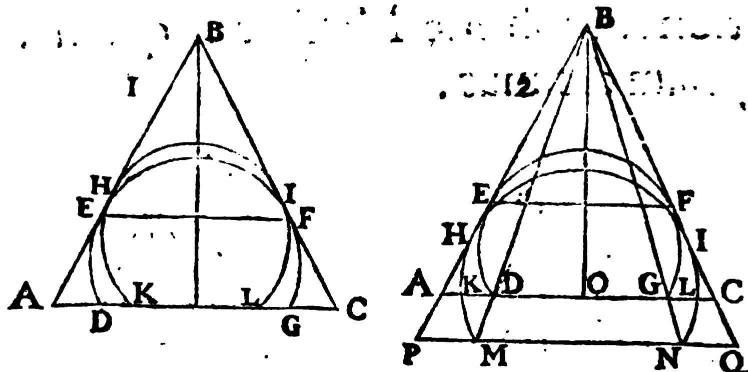
tionem ſphæræ Maximam quam Propriam dicimus.





NOtandum eſt, quòd etiamſi in præcedentibus de Conis Proprijs circumſcribentibus Sphæram & ſphærarum Portiones loquuti ſimus, & naturã eorum declarauimus, ex quibus ſatis manifeſtum eſt vnde ſic vocentur; attamen nunc de inſcribendo Sphæras & ſphærarum portiones acturi, licebit hic explicare etiam naturam earum quæ inſcribendæ ſunt; quæ maximè conſiſtit in eo quòd ſint portiones maximæ. Et licet in eodem Cono (nec non in omni) inſcribi poterit Sphæra, vel quæuis alia portio ſphæræ; ſemper tamen, quæ Propria vocatur, erit maior ſphærâ, vel quâcunque aliâ portione ſphæræ in eodem cono inſcribendâ.

Sit igitur in figura prima Conus rectus A B C, & in eo inſcripta Portio Sphæræ D E F G tangens conum in E, & F, ita vt pars E B, vel F B ſit dupla reliquæ E A vel F C. Dico Portionem D E F G, eſſe Propriam & maximam inſcriptibilem in cono A B C. Si enim non



sit maxima, supponatur quòd portio K H I L (quæ sit maior portio sphæræ) in eodem cono A B C inscripta & tangens illum in H & I foret maior vel saltem æqualis. Et quoniam portio K H I L supponitur esse Maior portio Sphæræ (maiores autem vocentur portiones illæ sphærarum quæ maiorẽ rationem habent ad sphęras quarum sunt partes) quàm sit portio D E F G, habebit ad conum suum proprium minorem rationem, quàm habet portio DEFG, ad conum suum proprium A B C. Sed conus A B C maior est cono proprio portionis K H I L; tangit enim eam. Multo igitur maiorem rationem habet portio D E F G, ad conum ABC, quàm portio K H I L ad eundem conum A B C. Maior est igitur portio D E F G portione K H I L; quod primo demonstrandum erat; Non maior est igitur Maior portio sphæræ.

Per præcedentem.

Vide 51. de Cono versus finem.

Supponatur iam quòd Portio Minor Hemisphærij possit esse Maior portione D E F G, quæ ideo tanget conum A B C, infra planum E F, in punctis H & I, & sit iterum in secunda figura portio K H I L: Fiat autem super basi portionis DEFG conus ei æqualis DBG,

& circa eundem axem B O conus proprius A B C tangens portionem D E F G (non refert autem vtrum conueniat in eodem puncto B an non.) Producatur iam portio K H I L vltra basim A C & fiat similis portioni D E F G, quæ sit M H I N; Ducatur etiam per M N planum parallelum basi A C productum vsque in concursum coni A B C producti in P & Q.

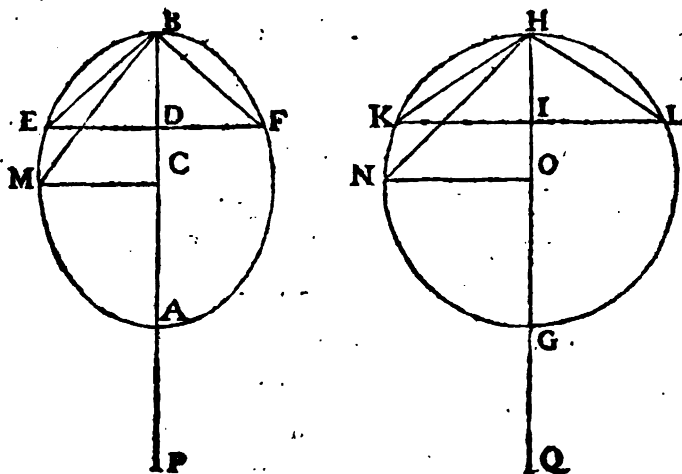
Quoniã igitur Conus DBG æqualis est Portioni DEFG, erit & conus MBN æqualis portioni M H I N, sunt enim vicissim similes & coni & portiones & ideo alternatim æquales super iisdem basibus constituti. Sed portio M H I N, excedit portionem K H I L maiori excessu, quàm Conus M B N excedit Conum D B G; Pars enim portionis signata literis M K L N, maior est parte coni M D G N. Quare ex æqualibus deductis inæqualibus quæ remanent inæqualia erunt, & Maior erit Conus D B G vel Portio D E F G, quam Portio K H I L. Igitur portio D E F G est propria inscriptibilis Cono dato A B C, & maior omni aliâ portione inscribendâ quod fieri oportebat.

Quoad vero circumscriptionem Coni cuiuscunque dati portione sphæræ propriâ, opus mihi non videtur aliâ demonstratione, quàm quâ vsi sumus in præcedentibus. Circumscribatur enim primo conus datus Cono minimo, deinde in eodem Cono Minimo inscribatur Portio propria, & illa Portio erit propria & minima circumscribens conum datum; quod satis manifeste apparebit ex præmissis. Iam vero videamus quid de sphæroidibus & de inscribendis & circumscribendis Conis circa illa dicendum sit.

PRO-

PROPOSITIO LIV.

Si Sphæroides secetur plano ad axem recto vtcunque, secta autem fuerit & sphęra plano, vt sint segmenta axium vtriusque in eâdem ratione, Portiones Sphæroidis sunt ad inuicem, sicut sunt Portiones Sphæræ.



Sit enim Sphæroides, cuius axis A B, centrum C sectum vtcunque plano ad axim recto per punctum D, faciente sectionem E F basim communem Portionum EBF, & EAF. Sit etiam Sphæra, cuius axis GH sectus sit in eâdem ratione in puncto I, quâ sectus est axis A B in D; & per punctum I agatur pla-

num ad axem rectum KL: Secentur omnia plano per axem in vtroque Sphæroide & Sphærâ, & ab vtriusque centro C, & O, erigantur perpendiculares CM, & ON.

Et quoniam est AD ad DB, sicut GI ad IH, & diuisæ sunt AB & GH bifariam in C & O; erit sicut rectangulum ADB ad rectangulum ACB, ita rectangulum GIH ad rectangulum GOH; composita sunt enim ex ijsdem proportionibus. Sed sicut rectangulum ADB ad rectangulum ACB, ita est quadratum ED ad quadratum MC, & ita etiam quadratum KI ad quadratum NO. Ductis iam lineis NH & KH, in circulo, & MB, & EB in Ellipsi, concipiantur ex reuolutione triangulorum NHO, KHI, EBD, & MBC, fieri quatuor Coni; qui quoniam bases eorum sunt proportionales, videlicet basis ex KI ad basim ex NO, sicut basis ex ED ad basim ex MC, ac etiam altitudines IH ad OH, sicut DB ad CB; erunt Coni ex illis facti etiam proportionales; hoc est Conus ex EBD ad Conum ex MBC, sicut conus ex KHI ad conum ex NHO. Componuntur enim ex eisdem rationibus. Producantur iam axes eorum, & fiant AP æqualis AC, & GQ æqualis GO.

Et quoniam demonstratum est quod sicut PD ad DA, ita sit portio sphæroidis EBF ad conum eius EBF; & sicut QI ad IG, ita portio sphæræ KHL ad conum suum KHL: sunt autem eædem rationes PD ad DA, & QI ad IG; Eadem igitur est ratio Portionis Sphæroidis EBF ad conum suum EBF; quæ portionis sphæræ KHL ad portionem suam KHL:

Arch. de Conoid. & Sphæroid. pro. 29. Coroll. 7. huius.

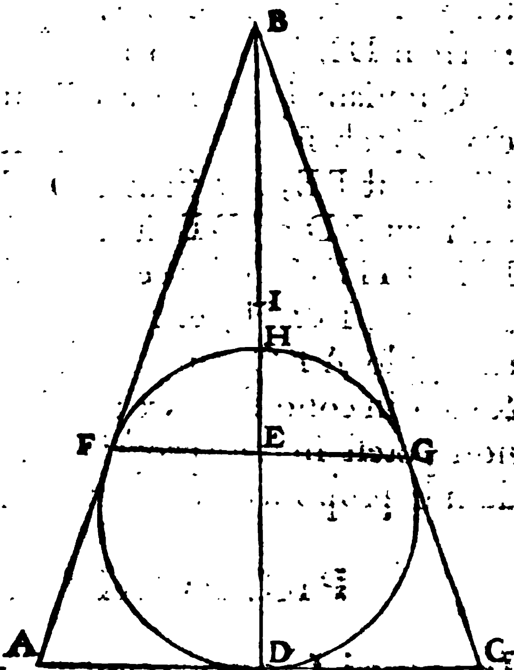
In eâdem verò ratione est conus EBF ad conum ex reuolutione trianguli MBC, hoc est dimidium Hemisphæroidis, quâ conus KHL ad conum ex NHO, scilicet dimidium Hemisphærij; & ad quadrupla posteriorum Portio Sphæroidis EBF erit ad totum Sphæroides, sicut Portio Sphæræ KHL ad totam sphæram: Quare si axes Sphæræ & Sphæroidis secti fuerint in eâdem ratione, erunt & portiones earum dissectæ in eâdem ratione, quod demonstrandum erat.

Notandum est, quòd non differat ratio demonstrationis in sphæroidibus, quæ fiunt ex reuolutione Ellipsis circa minorem diametrum, nec cuiuslibet Sphæroidis secti secundum quamcunque diametrum, planis, quæ non sunt ad diametros recta, sed secundum ordinatim applicatas rectas ad easdem diametros. Est etiam & alia species Sphæroidum, quæ solum propria est Conis Scalenis; in his enim inscribuntur, & sphæroidia Scalena vocari possunt, si tamen inter sphæroidia numeranda sint; Non enim ex reuolutione ellipsis vel cuiusuis alius curuæ generantur, sed potius Sphæroidia torta videntur esse, quemadmodum etiam & Coni Scaleni, Coni torti, nominari poterunt: Eandem vero rationem habent ad Conos suos circumscribentes, & inscriptos, quam reliqua solida ex reuolutione curuarum circa manentes axes genita, ad Conos suos proprios. Sed de his nihil amplius iam dicendum duxi.

PRO-

PROPOSITIO LV.

In Cono proprio circumſcribente ſphæram non poteſt proprie inſcribi Sphæroides.



Fiat Conus Proprius circũſcribens Sphæram, qui ſectus Plano per axẽ exhibeat triágulum A B C, & axem eius B D diuidentem baſim A C in æqualia in puncto D. Diuidatur iam axis DB in puncto E, vt ſit D E tertia pars ipſius DB, & per E punctũ tranſeat linea F G parallela baſi A C diuidẽs etiam latera B A, & B C, in F, & G, vt ſit A F, vel C G tertia pars A B, vel C B. Quoniam igitur per conſtructionem Conus erat Proprius inſcribens Sphæram, erit in triangulo per axem latus B A, vel B C, triplum A D vel D C, & ideo circulus inſcriptus triangulo A B C tangens baſim A C in D, tanget etiam latera A B & C B in punctis F & G; ſunt enim tangentes ductæ a punctis A,

vel C, omnes æquales, quoniam AD, æqualis est DC. Inscribatur igitur circulus FHGD in triangulo ABC; & quoniam recta BF tangit Circulum FHGD in F, & ab F ordinatim applicata est linea FE ad diametrum, erit sicut BD ad DE, ita BH ad HE.

Per conuersionem Prop. 43. huius.

Supponatur iam quod possit etiam Ellipsis transire per puncta FDG & inscribi in triangulo ABC, vt tangat latera AB, & CB, in punctis F, & G, & secare axem DB in puncto I,

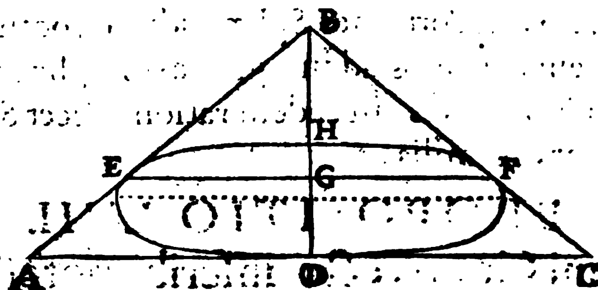
Quoniam igitur linea BF tangit Ellipsim in puncto F, & ab F ad diametrum eius ID ordinatim applicata est FE, erit sicut BD ad DE, ita BI ad IE. Sed sicut BD ad DE, ita est BH ad HE, quare sicut BH ad HE, ita etiam est BI ad IE. Quare idem est punctum I & H; & non potest inscribi Ellipsis in triangulo ABC tangens latera eius in F, D, & G; & ideo in cono facto ex reuolutione trianguli ADB non potest inscribi propriè Sphæroides, quemadmodum in propositione enuntiatum erat.

PROPOSITIO LVI.

In omni Cono præterquam Proprio inscribendæ Sphæræ, inscribi potest propriè Sphæroides.

Sit datus Conus ABC, qui non sit Proprius inscribendæ Sphæræ, & diuidatur plano ad basim AC parallelo per punctum G in axe, vt sit GD tertia pars totius BD, secante etiam latera Coni ABC in E &

F, in



F, in eâdem ratione, quâ secatur Axis BD. Concipiatur Conus secari plano per axem BD, eiusque sumatur punctum H, ita vt sit sicut BD ad DG, ita BH ad HG. Dato igitur axe HD, & lineâ EG ordinatim applicatâ, describatur circa eundem axem Ellipsis per puncta E & F; quomodo autem hoc faciendum sit docetur a Mydorgio libro secundo Conicorum Prop. 6. & cuicunque licet modicè versato in Conicis manifestum est.

Quoniã igitur à puncto E in sectione ordinatim applicata est linea EG ad diametrum HD, & in axe HD producto est punctum quoddam B, a quo est eadem ratio BD ad DG quæ BH ad HG; Si igitur ab eodem puncto B ducta fuerit ad punctum E in sectione linea BE, ipsa tanget sectionem in eodem puncto E, & reuolutis omnibus circa axẽ BD, facta erunt Conus ABC, & in eo inscriptum Sphæroides sicut oportebat. 34. lib. I. Apollonij.

DEFINITIONES.

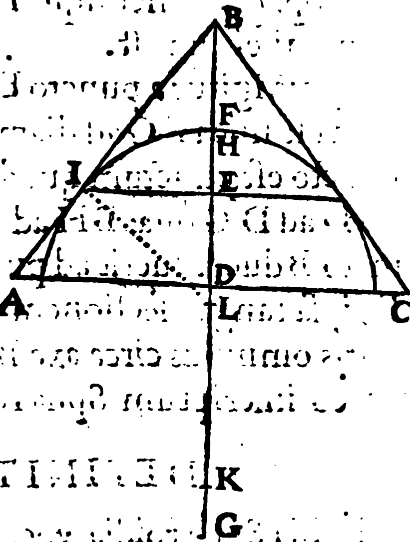
Similia Sphæroidia vocantur illa quorum diametri coniugatæ genetricum figurarum sunt in eâdem ratione, & quæ facta sunt ex reuolutione figuræ geni-

tricis circa similem axem.

Similes verò Portiones Sphæroidum vocamus eas, quæ habent axes suos ad integros axes Sphæroidum, quorum sunt partes, in eâdem ratione, licet Sphæroidia fuerint dissimilia.

PROPOSITIO LVII.

In omni Cono recto inscribi potest quælibet Portio Sphæroidis alicuius, præterquam portio illa, cuius axis est ad axem integrum Sphæroidis, sicut axis Portionis propriæ Sphæræ in eodem Cono inscriptibilis, ad axem Sphæræ, cuius pars illa est.



SIt Triangulum ABC sectio Coni recti per axem, & ipse axis BD sectus in E, & F, in tres partes æquales; & per E, ducta sit recta IE basi AC parallela; & in BD quantum opus est productâ, sumatur vtcunque punctum G: Manifestum est quòd BG maior erit quã GE; quare maior erit proportio BG ad GE, quam BF ad FE; & ideo in lineâ FE erit aliquod punctum, vtpote H, ad quod erit

BH ad HE sicut BG ad GE. Iterum manifestum est posse constitui Sphæroides tale, vt minus segmentum axis sit HD, & reliquum segmentum DG, in quacunque ratione datâ ad illud; & quòd foret BH, ad HE, sicut BG ad GE. Hoc igitur supposito, manifestum est quòd portio illius Sphæroidis erit Propria inscripta in Cono ABC, & quod tanget illum in plano per IE ducto. Vnde manifestè apparet quòd quælibet portio alicuius Sphæroidis poterit inscribi in eodem Cono ABC; quod primò probandum erat, præter vnam, quod sic etiam probabimus. Si enim fuerit BH, ad HE, sicut BK, ad KE, & diuisâ HK bifariam in L, & ducta LI fuerit perpendicularis ad latus AB; tunc figura inscripta erit Portio circuli, & ex reuolutione omnium circa axem BD, facta erit Portio Sphæræ propriè inscripta in Cono ABC; & in illâ ratione axis HD, ad axem HK non potest alia figura inscribi propriè in Cono ABC; quod etiam erat probandum;

Hic notandum quod Portionum Sphæroidum quæ propriè inscribẽdæ sunt in Cono aliquo, in quo etiam aliqua sphæræ Portio propria inscribenda sit, singulæ minores portiones sunt Sphæroidum oblongorum, & singulæ maiores sunt Sphæroidum latorum portiones. In figurâ enim præcedente, si inscribenda fuerit Portio Minor Sphæroidis quam est Portio Sphæræ propria in eodẽ Cono inscripta, axis eius habebit minorem rationem ad axem totius Sphæroidis, quàm habeat HD ad axem totum Sphæræ HK; quare maior erit diameter Sphæroidis quàm sit HK diameter Sphæræ. Ponatur

igitur punctum G pro termino diametri vel axis alicuius Sphæroidis, cuius portio supra planum AC constituta inscribenda sit propriè in Cono ABC; & quoniam necessarium est vt tangat Conum in I, erit alter terminus axis inter F, & H; & ideo multò maior erit axis Sphæroidis, quàm axis Sphæræ HK. Sed quadrata ordinatim applicatarũ in Sphærâ sunt æqualia rectangulis ex segmentis diametri factis; scilicet quadratum IE æquale est rectangulo HEK: in Sphæroide vero quadratum IE minus est rectangulo ex segmentis diametri facto; consequenter reliqua omnia ordinatim applicatarum quadrata minora erunt, quam sint rectangula ex segmentis diametri vel axis Sphæroidis facta. Quare ordinatim applicata ad centrum Sphæroidis minor erit, quàm dimidiũ axis; & ideo sphæroides oblongum erit, cuius Portio Minor, quàm Portio propria Sphæræ in Cono ABC inscripta, inscribenda est. Simili modo demonstrari potest omnes Portiones propriè inscribendas, quæ maiores sunt Portione propriâ Sphæræ inscriptâ, esse Portiones alicuius Sphæroidis lati; minora enim sunt rectangula ex segmentis axis, quàm sint quadrata ordinatim applicatarum ad axem.

Ex demonstratis etiam colligi potest, quòd omnis portio minor Sphæroidis propriè in Cono inscripta maior sit Portione Sphæræ propriâ eiusdem Coni; Maiores vero Portiones minores sint.

Quod autem sit aliquis Conus rectus, in quo nulla potest portio sphæræ propriè inscribi, manifestum est; Nam omnes Coni, quorum latus maius trianguli per axem maius est quàm triplum basis, (quemadmodum

in triangulo A B C, in quo sit latus A B maius quàm triplum A C) hoc habent proprium, vt eis nulla possit inscribi Portio sphæræ Propria: Diuisa enim A B trifariam, & factâ A D tertiâ parte ipsius, erit recta A D, maior base A C: quare fiat A F æqualis A C, & ab F, ad latus A B perpendicularis erigatur F G, & a puncto D, linea D E parallela F G.

Quoniam igitur A F, & A C sunt æquales; anguli etiam F, & C, recti, erunt F G & G C etiam æquales; quare si facto G centro, & G F, vel G C interuallo, describatur circulus, tanget lineas A F & A C, in punctis F & C; non tanget vero lineam A B in puncto D; quare ex reuolutione trianguli & circuli circa axem B C & centrum G, facta sphæra non erit propriè inscripta in Cono ex reuolutione trianguli A B C facto. Sed sphæra facta ex reuolutione circuli ex radio E D circa eundem axem B C, tanget latus Coni propriè in puncto D; sed idcirco non tanget basim Coni in C puncto, sicut oportuit; maior enim est E C linea, quam E D radius Sphæræ. Non potest igitur inscribi propriè sphæra multo minus Portio Sphæræ. Oportet enim quòd punctum E sit centrum cuiuscunque Sphæræ vel portionis sphæræ, quæ continget latus A B in D.

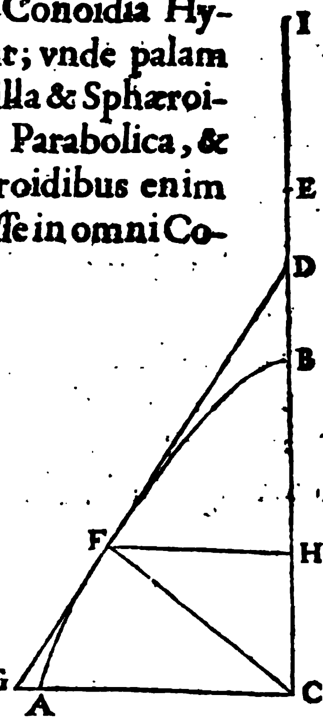
Nota etiam, quòd in huiusmodi Conis Sphæroidia vel portiones Sphæroidum propriè inscribenda, sint omnes oblongæ: ductâ enim D H ad axem B C per-

perpendiculari, & facto situ BG ad GH, ita BI ad IH, erit IC axis Sphaeroidis propriè inscribendi in Cono ex reuolutione trianguli ABC facto; & erit recta DH ordinatim applicata ad diametrum vel axem IC. Sed rectangulum ex segmentis diametri CH, HI, maius est quadrato ex DH, (circulus enim circa diametrum IG non inscribi potest in triangulo ABC, multo minus Sphaeroides latum cuius minor diameter IG.) Similiter & omnia rectangula ex segmentis eiusdem diametri IC, maiora erunt quadratis ordinatim applicatarum; quare diameter IC semiellipsis in triangulo ABC inscripti Maior erit diametro ipsius semiellipsis; & ideo quod factum erit sphaeroides ex reuolutione eiusdem semiellipsis, erit oblongum, sicut diximus. Manifestum est etiam, quod omnes portiones quae in huiusmodi Conis propriè inscribi possint, sint etiam Portiones sphaeroidum oblongorum, cuius demonstrationem quoniam facillimam, breuitatis causa omitto. Sphaeroidia vero lata & eorum Portiones in nullis Conis inscribenda sunt, praeterquam in quibus etiam portiones sphaerarum propriè inscribi possunt; medium enim locum tenet sphaera vel sphaerae portio, inter sphaeroidia oblonga, & lata, & eorum portiones; quod cuiuis intuenti satis manifestè apparebit.

Conoidis Parabolici Inscriptio adeò facilis est, ut nihil de illo dicendum putem, sed solum ut videas Pro

positionem 50. de Circumscriptione eiusdem Cono minimo, vnde inuentio diametri eius clare apparebit quâ inuentâ vnà cum puncto contactus in latere trianguli per axem, à quo ordinatim applicata ad diametrum etiam data est; quâ cognitâ, latus rectum & tota sectio manifesta erit: Manifestum est etiam quod sicut in inscribendis portionibus Sphærarum, vna sola portio possit in eodem Cono propriè inscribi, ita etiam de Conoidibus Parabolicis dicendum sit, nulla enim alia portio præterquam vna sola potest propriè inscribi in eodem Cono.

In omni verò Cono, infinita Conoidia Hyperbolica propriè inscribi possunt; vnde palam fit analogiam esse quãdam inter illa & Sphæroidia; sicut etiam inter Conoidia Parabolica, & Sphærarum portiones; De Sphæroidibus enim iam demonstrauimus infinita posse in omni Cono propriè inscribi.



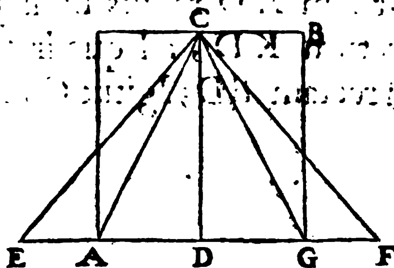
Nunc autem repetamus figuram Propositionis 51. In triangulo GDC diuiso parallelâ FH basi GC, supponatur axis CD produci in infinitum, & in producto sumi vtcunque punctum I; secundum vero distantiam quam habebit I a puncto D, cadet etiam punctum B, (quod vertex est sectionis) vel propiùs vel longiùs ab eodem puncto D; oportet enim quod eadem sit ratio ID ad DB,

& I H ad H B; quare si I punctum foret propius, etiam & B accedet propius, & si I longius, tunc & B distabit etiam plus; vtcunque vero fuerint, semper tamen Hyperbolica sectio continget latus D G triaguli DGC in puncto F; vnde ex reuolutione trianguli GDC, vnà cum curuâ hiperbolicâ AB circa axem DC, facta erunt Conus, & in eo inscriptum propriè Conoides Hyperbolicum: Maximum autem non potest dari, quoniam semper potest dari maius: sic etiam de sphæroidibus manifestum est quod portiones eorum semper augeri possint: Portionum vero Conoidum Parabolicorum, & sphærarum non potest dari aut maior aut minor, vna enim sola propriè inscribitur non plures.

Opus est iam vt aliquid dicamus de inscriptione maximorum Conorum in portionibus sphærarum, vel sphæroidum, vel Conoidum Parabolicorum, vel Hyperbolicorum, sed omnes hi riuuli quasi ex vno fonte scaturiunt, & vna sola regola pro omnibus seruit: Dato enim quocunque ex istis solido, & circumscripto Cono Minimo, in illo inscribatur Conus Maximus, & idem erit in vnoquoque istorum solidorum Maximus Inscriptus. Sed redeamus iam in semitam vnde digressi sumus.

LEMMA.

Sit Cylindrus AB cuius axis CD, & circa eundem axem constituatur Conus ECF ei æqualis. Dico basim Coni EF esse triplam basis AG Cylindri AB. Ductis enim lineis AC & GC supponatur Conus ACG super eâdem basi & eiusdem altitudinis constitutus; quare Cylindrus AB erit triplus Coni ACG. Igitur Conus ECF æqualis Cylindro AB, erit etiam eiusdem Coni ACG triplus: Coni verò eiusdem altitudines sunt inter se sicut bases. Quare basis EF coni ECF est tripla basis AG coni ACG, vel Cylindri AB quod erat demonstrandum.



PROPOSITIO LVIII.

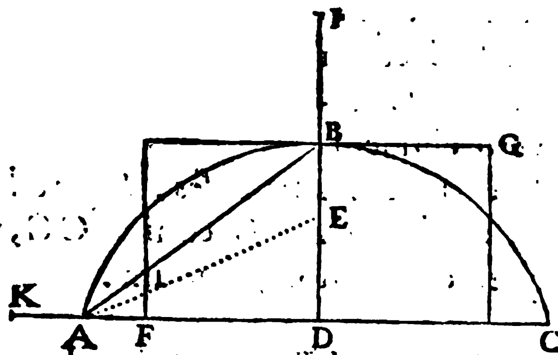
In omni Portione Sphæræ, quadratum radij basis vnà cum tertiâ parte quadrati axis, simul æqualia sunt duplo quadrato radij basis Cylindri æqualis Portioni & eiusdem altitudinis.

Sit Portio quæcunque Sphæræ ABC, cuius axis BD, circa quem, & eiusdem altitudinis, constituatur

Cylin-

Cylindrus æqualis portioni ABC. Dico quadratum AD vnà cum tertià parte quadrati BD simul dupla esse quadrati radij basis Cylindri æqualis Portioni. Diuidatur enim BD axis portionis in E, vt sit quadratum ex DE æquale tertiæ parti quadrati BD; & in producto axe DB sit I punctum altitudo Coni super basi portionis constituti & ei æqualis. Producatur iam AD radius basis portionis in K, vt sit quadratum KD, ad quadratum AD, sicut recta ID, ad rectam BD; Igitur Conus cuius basis radius KD,

14. huius.



& altitudo BD, æqualis est Cono ex basi portionis AC, & altitudine DI, (hoc est portioni ipsi), reciprocantur enim bases & altitudines; Quare etiam æqualis erit Cylindro FG, qui supponitur fieri æqualis portioni ABC; & igitur quadratum KD erit triplum quadrati DF radij basis Cylindri FG.

Per præcedens Lemma.

Cum ergo sit sicut duplum quadrati AD ad quadratum AB, hoc est ad quadrata AD & DB, ita DB linea ad lineam BI, erit componendo & per conuersionem rationis sicut duplum quadrati AD vnà cum

quadrato A B, hoc est triplum quadratum A D cum quadrato D B ad duplum quadratum A D, ita I D ad D B. Sed sicut I D ad D B, ita factum est quadratum K D ad quadratum A D. Ex æquo igitur sicut triplum quadratum A D vnà cum quadrato B D ad duplum quadrati A D; ita quadratum K D ad quadratum A D & sicut tertia pars antecedentis priorum scilicet quadratum A D cum quadrato D E ad duplum quadrati A D; ita tertia pars antecedentis posteriorum, scilicet quadratum F D ad quadratum A D, & permutando sicut quadrata A D & D E, ad quadratum F D, ita duo quadrata A D ad quadratum A D. Quadratum igitur A D cum quadrato D E simul, hoc est quadratum radij basis Portionis A B C vnà cum tertiâ parte quadrati axis eius B D, duplum est quadrati F D radij basis Cylindri F G, æqualis portioni & eiusdem altitudinis, quod demonstrandum erat.

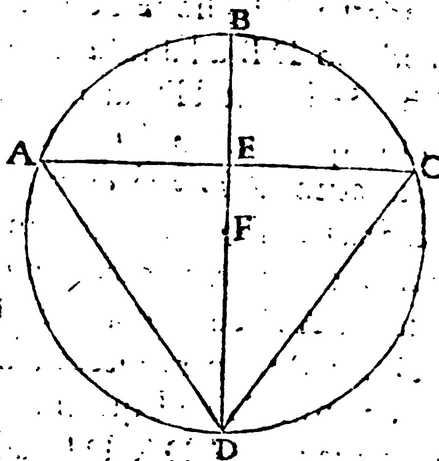
LEMMA.

Conus rectus in Sphærâ inscriptus est ad Sphæram; sicut solidum ex quadrato axis eiusdem Coni in reliquum diametri Sphæræ, ad dimidium Cubi totius diametri eiusdem Sphæræ.

Esto Sphæra A B C D cuius centrum F, in quâ inscriptus sit Conus rectus A D C circa axem E D parsque diametri Sphæræ reliqua pars sit B E,

Dico

Dico Conum ADC esse ad Sphæram ABCD, sicut solidum ex quadrato DE in EB ad dimidium Cubi ex diametro Sphæræ BD.



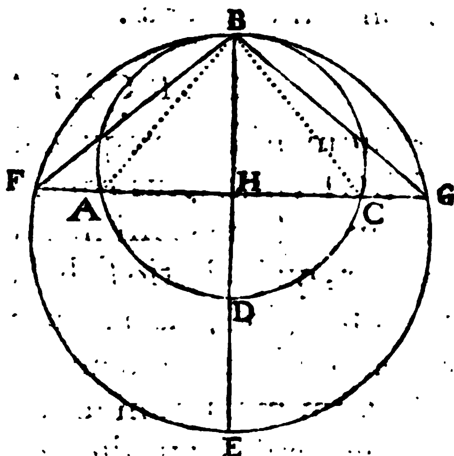
Quoniam enim Coni habent ad inuicem rationem compositam ex basibus & altitudinibus ipsorum; Conus verò ADC, cuius basis ex radio AE, & altitudo ED, ad Conum cuius basis est ex radio BD, & altitudo DF, se habet sicut solidum parallelepipedum ex rectangulo DEB in DE, hoc est ex quadrato DE in EB, ad solidum ex quadrato DB in DF, hoc est dimidium Cubi ex diametro BD; Conus verò ex radio basis DB, & altitudine DF æqualis est Sphæræ ABCD. Quare conus ADC inscriptus Sphæræ ABCD, est ad Sphæram ABCD sicut solidum ex quadrato ED axis coni in EB reliquum axis Sphæræ, ad dimidium Cubi BD totius diametri sphæræ, quod erat propositum.

Conus ex radio DB & altitudine DF æqualis est Sphæræ. Arch. li. 1. de Sph. & Cylindro.

PROPOSITIO LIX.

Si diameter Sphæræ producta fuerit, ita vt pars producta æqualis fuerit dimidiæ ipsius, & circa totam describatur Sphæra, & si ambo secentur vtcunque plano

ad diametrum recto, & super circulo in maiore Sphærâ per intersectionem plani facto, constituatur Conus habens verticem in contactu Sphærarum: Ille Conus erit æqualis Portioni Minoris Sphæræ ab eodem plano dissectæ, & circa eundem axem constitutæ.



SIt enim Sphera AB. CD, cuius diameter BD producatur in E, vt sit DE æqualis dimidiæ DB, & circa totam BE, describatur alia Sphæra FBGE, tangens Sphæram ABCD in B puncto. Secentur iam ambo vtcunque plano ad diametrum recto, faciente in Sphærâ FBGE circulum circa diametrum FG, & in Sphærâ ABCD dissecante Portionem ABC, & super circulo in Sphærâ maiori pro basi, inscribatur Conus FBG, habens verticem in contactu Sphærarum B. Dico Conum FBG æqualem esse Portioni Minoris Sphæræ constitutæ circa eundem axem BH, scilicet Portioni ABC. Inscribatur enim in portione ABC, conus ABC: &

Quoniam Conus æqualis Portioni ABC, habens

eandem basim, est ad Conum ABC, sicut composita ex HD & dimidiâ BD, hoc est HE, ad ipsam HD; erit portio ABC ad Conum suum ABC, sicut HE ad HD. Conus verò FBG est ad Conum ABC (cùm sint eiusdem altitudinis) sicut quadratum FH ad quadratum AH, hoc est sicut rectangulum EHB ad rectangulum DHB, vel sicut EH ad HD. Quare cùm Portio ABC habeat ad Conum suum ABC eandem rationem quam habet Conus FBG ad eundem Conum ABC; erit Conus ABG æqualis Portioni ABC quod demonstrandum erat.

Arch. lib. 2. prop. 2.

COROLLARIVM.

Hinc manifestũ est quòd Conus maximus in Sphærâ FBGE, inscriptus æqualis erit Sphæræ ABCD circa axem eiusdem Coni maximi descriptæ; vnde etiam sequitur, quòd Portio se habet ad Sphæram suam, sicut Conus (in Sphæra cuius axis est sesquialter diametri Sphæræ datæ) eiusdem altitudinis cum portione, ad Conum maximum in eâdem sphærâ inscriptum, vel sicut parallelepipedum ex segmentis lineæ sesquialteræ diametro Sphæræ, cuius basis latus sit æquale altitudini eiusdem Portionis, ad quatuor vigesimas septimas Cubi eiusdem rectæ: Cùm enim in præcedente figurâ, Conus FBG sit ad sphæram FBGE, sicut solidum ex quadrato BH in HE, ad dimidium Cubi ex diametro BE; Cubus verò ex diametro BE, sit ad Cubum ex diametro BD, sicut 27. ad 8. quare Conus FBG est ad sphæram ABCD, sicut solidum ex quadrato BHD in HE ad dimidium Cubi ex lineâ BD,

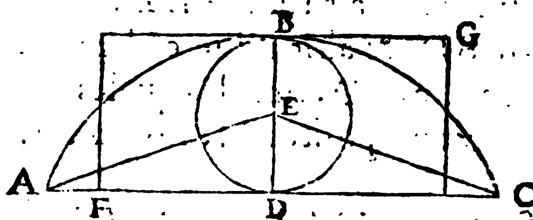
Lemma. præcedẽs.

hoc est

hoc est 4. Atqui Portio ABC æqualis est Cono FBG, ideoque se habet ad Sphæram ABCD, sicut solidum ex quadrato BH in HE, ad 4. quorum Cubus ex totâ BE est 27.

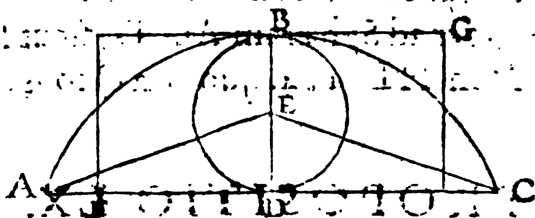
PROPOSITIO LX.

Omnis Portio Sphæræ æqualis est tribus Conis ex eâdem basi & dimidiâ altitudine eiusdem Portionis, vnà cum sphærâ, cuius diameter est ipse axis Portionis.



SIt Portio quæcunque Sphæræ ABC, cuius axis BD diuisus sit in E bifariam, & circa diametrum vel axem BD concipiatur sphæra, & ductis AE, EC, super basi Portionis AC sit Conus AEC, cuius altitudo sit DE dimidium axis: Dico tres Conos AEC, vnà cum sphærâ circa axem BD simul æquales esse Portioni ABC: Constituatur enim circa axem BD, Cylindrus FG, æqualis portioni ABC.

Et quoniam quadratum AD radij basis Portionis vnà cum tertiâ parte quadrati axis portionis BD, simul dupla sunt quadrati FD radij basis Cylindri FG

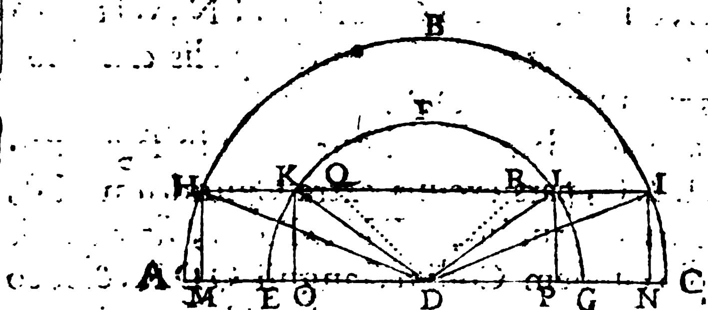


æqualis portioni & eiuſdem altitudinis, erunt tria quadrata A D, vnà cum quadrato axis B D, ſexcupla quadrati F B, & ideo tres Coni ex baſi A C & altitudine B D, vnà cum cono ex radio baſi B D, & eâdem altitudine B D, ſimul æquales ſunt duplo Cylindro F G, hoc eſt duplæ portioni A B C; Sed Conus ex radio baſi B D & altitudine B D eſt duplus Sphæræ; quare tres Coni ex baſi A C & altitudine D E, vnà cum Cono ex radio baſi B D, & altitudine eâdem D E, hoc eſt Sphærâ circa axem B D, ſimul æquales ſunt Portioni A B C, quod erat propoſitum demonſtrare.

PROPOSITIO LXI.

Si duo Hemiſphæria inæqualia conſtituta fuerint ſuper eâdem baſi & circa idem centrum & ſecta fuerint ambo eodem plano ad baſim parallelo, & in vtroque inſcriptus fuerit Cylindrus inter eadem plana parallela; partes ſegmentorum excluſæ extra Cylindros inter ſe æquales erunt.

Eſto



Esto Hemisphærium ABC, cuius centrum D, basis AC, & circa idem centrum & super eadem basi, scilicet eodem plano constituatur aliud Hemisphærium minus EFG, & secentur ambo plano HI basi AC parallelo, & in vtroque ipsorum segmento inscribantur Cylindri; in maiore scilicet Cylindrus HINM, in minori vero Cylindrus KLPO; Dico partes exclusas segmentorum extra Cylindros esse inter se æquales, videlicet partem notatam literis AHM, NIC segmenti maioris, æqualem esse parti EKO, PLG, minoris segmenti. Fiat enim conus rectangulus QDR inter eadem plana parallela, & sit HDI conus segmenti maioris, & KDL segmenti minoris;

Quoniam igitur Conus rectangulus QDR vna cum Cono segmenti HDI sunt æquales dimidio Sectoris 10. huius.
secundi AHDIC, quidem Conus rectangulus QDR cum Cono segmenti KDL simul æquales sunt dimidio sectoris secundi EKDLG; erunt Coni segmenti HDI & conus rectangulus QDR bis sumpti æquales toti Sectori secundo AHDIC; Sumpto igitur communi Cono HDI, erunt tres Coni HDI cum duo-

bus Conis rectangulis QDR simul æquales segmento AHIC, quare deducto Cylindro HN, vel tribus Conis HDI, reliqua pars segmenti æqualis erit duobus Conis rectangulis QDR.

Simili artificio demonstrabitur quòd in segmento minori EKLG, pars exclusa extra Cylindrum KP, hoc est, quæ notatur literis EKOPLG, sit æqualis etiam duplo eiusdem Coni rectanguli QDR, & ideo partes illæ exclusæ, cum sint æquales eidem tertio, scilicet duplo Cono rectangulo QDR, sunt inter se æquales quod erat propositum demonstrare.

COROLLARIVM.

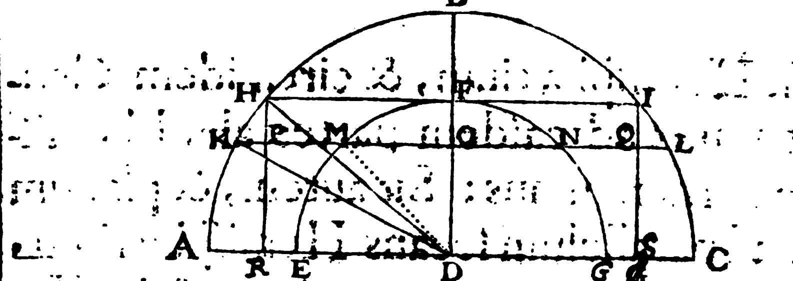
Hinc elicitur quòd excessus isti segmentorum supra Cylindros in ipsis inscriptos, sint semper dupli excessuum Cylindri super basi Hemisphærij constituti supra segmentum inter eadem plana intercepti. Demonstratum est enim quòd excessus Cylindri supra Hemisphærium vel quamlibet partem eiusdem vtcunque inter basim, & planum basi parallelum interceptam sit semper æqualis Cono rectangulo eiusdem altitudinis; Iam vero demonstratum est quod isti excessus segmentorum supra Cylindros sint dupli ipsorum Conorum rectangulorum; Dupli igitur sunt excessuum Cylindri supra segmenta hemisphæriorum inter eadem plana intercepti, & supra eandem basim Hemisphærij constituti.

PROPOSITIO LXII.

Si ſit Hemiſphærium, & circa idem Centrum & ad eaſdem partes aliud hemiſphærium minus; Sit autem, & planum baſi parallelum ſecans Hemiſphærium maius, tangens vero minus, & in Hemiſphærio maiori inſcriptus Cylindrus inter parallelum & baſim; Hemiſphærium minus æquale erit exceſſui ſegmenti maioris ſupra Cylindrum, & ſingulæ partes Hemiſpherij minoris ſingulis partibus exceſſus prædicti correſpondentes æquales erunt.

SIt enim Hemiſphærium ABC, cuius centrum D, axis BD, & circa idem centrum, & ad eaſdem partes ſit Hemiſphærium minus EFG, quod tangat planum baſi parallelum HI in F, ſecet verò Hemiſphærium ABC in H & I; & inter planum HI & baſim AC inſcribatur Cylindrus HG: Dico Hemiſphærium minus EFG æquale eſſe exceſſui ſegmenti AHIC ſupra Cylindrum inſcriptum HG, & ſingulas partes hemiſphærij EFG, ſingulis partibus exceſſus ſegmenti ſupra Cylindrum HG, viciſſim ſumptis æquales eſſe: Ducatur enim vtcunque planum KL ſecans

Hemiſ-



Hemisphærium maius in K & L, minus in M & N, Cylindrum HS in P, & axem communem B D in puncto O; & concipiantur omnia secta plano per axem, in quo sint ductæ a punctis M, H & K, ad centrum D, rectæ MD, HD, & KD.

Quoniam igitur quadratum MD æquale est quadratis MO & OD; quadratum autem HD æquale est quadrato FD, hoc est quadratis MO, OD, vnà cum quadrato HF, vel PO: Quadratum vero KD (æquale quadrato HD) æquale est quadratis KO & OD: quare dempto quadrato OD, quadratum KO æquale erit quadrato PO, & MO: Quadratum igitur MO est æquale excessui, quo quadratum KO superat quadratum ex PO. Circulus igitur factus ex radio KO æqualis est duobus circulis ex radijs PO & MO, quare si ex circulo facto ex radio KO subtrahatur circulus ex radio PO; reliquum ex parte KP æquale erit circulo ex radio MO. Idem demonstrabitur per totum spatium, vbicunque secta fuerint Hemisphæria & Cylindrus plano ad basim AC parallelo; &

ideo

ideo Hemiſphærium minus E F G æquale eſt parti ſolidæ annulari Hemiſphærij A B C, vel ſegmenti A H I C, extra Cylindrum H S, & quælibet pars Hemiſphærij E F G, cuilibet parti exceſsûs ſegmenti ſupra Cylindrum H S, intercepti inter eadem plana parallela æqualis erit; ſcilicet portio M F N æqualis erit parti exceſsûs denotatæ literis K H P Q I L, & ſegmentum E M N G, æquale erit parti A K P R S Q L C, quod demonſtrandum erat.

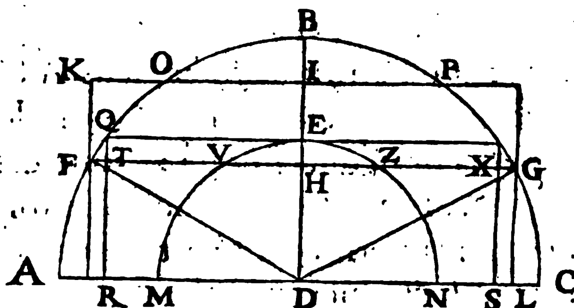
COROLLARIVM.

Euidenter apparet ex demonſtratis hîc, & ex propoſitione 27. quòd annulus Sphæricus A H R, I C S ſecari poteſt duobus planis baſi A C parallelis, ita vt pars intermedia ſit in quâcunque ratione datâ ad totum annulum. Si enim ſectum fuerit Hemiſphærium E F G, ita vt pars intermedia fuerit ad totum in ratione datâ, & producta fuerint eadem plana ad interſectionem Hemiſphærij A B C, manifeſtum eſt annulum ſphæricum ita etiam ſecari in eâdem ratione; partes enim interceptæ inter eadem plana ſunt inter ſe æquales.

PROPOSITIO LXIII.

Si ſegmentum quodcunque Hemiſphærij ſectum fuerit plano ad baſim parallelo, ita vt quadratum totius axis ſegmen-

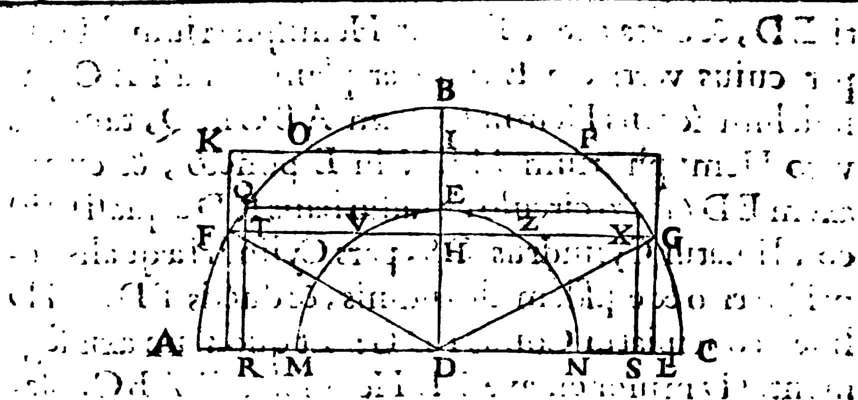
ti ſit triplum quadrati partis interceptæ inter planum parallelum & baſim, & conſtitutus fuerit circa eundem axem ſegmenti, Cylindrus eiuſdem altitudinis, habens baſim æqualem circulo per interſectionem plani paralleli in ſegmento facto; Cylindrus ille æqualis erit ſegmento Hemiſphærij.



SIt enim Hemiſphærium ABC; & quodcunque ſegmentum eius AOPC, cuius axis ID ſectus ſit in H, vt quadratum ID ſit triplum quadrati DH, & per H tranſeat planum FG baſi AC parallelum, & in baſi AC fiat circulus circa centrum D æqualis circulo FG in ſegmento a ſectione facto, ſuper quo pro baſi conſtruatur Cylindrus KL, eiuſdem altitudinis ID cum ſegmento AOPC. Dico Cylindrum KL æqualem eſſe ſegmento AOPC. Secetur enim axis BD in E, vt ſit quadratum BD triplum quadra-

ti ED; & circa axem ED sit Hemisphærium MEN per cuius verticem E transeat planum basi AC parallelum secans Hemisphærium ABC in Q, tangens vero Hemisphærium MEN in E puncto, & circa axem ED (facto circulo ex radio basis RD æquali QE) constituatur Cylindrus QS, pars Cylindri æqualis hemisphærio & eiusdem altitudinis; & ductis FD & GD lineis concipiatur Conus FDG: Et quoniam axis segmenti ID minor est axe BD Hemisphærij ABC, planum FG secabit hemisphærium MEN & Cylindrum QS: Signentur igitur intersectio Cylindri QS literâ T, & intersectio plani cum hemisphærio V.

Et quoniam Cylindrus TS est pars Cylindri æqualis Hemisphærio & eiusdem altitudinis; erit æqualis sectori secundo AFDGC eiusdem altitudinis HD. Sed sector secundus AFDGC vnà cum Cono FDG conficiunt segmentum AFGC; Cylindrus vero TS vnà cum excessu notato literis AFTR, SXGC, constituunt idem segmentum AFGC. Excessus verò ille per præcedentē demonstratur æqualis segmento MVZN minoris hemisphærij MEN. Ex æquali igitur Conus FDG æqualis est segmento MVZN, quod memoriâ retinendum est. Rursus cum factum sit sicut ID ad HD, ita BD ad ED, erit permutando sicut ID ad BD, ita HD ad ED; Quare segmentum AOPC cuius axis ID, est ad suum hemisphærium cuius axis BD, sicut portio MVZN cuius axis HD, ad suum Hemisphærium MEN cuius axis ED; Similia igitur sunt segmenta AOPC & MVZN ideoque in triplâ ratione axium suorum, hoc est in triplâ ratio- 9. huius.



ne ID ad HD. Sed sicut ID ad HD, ita est Cylindrus KL ad Cylindrum FL, & Cylindrus FL (cum sit triplus Coni FDG) est ad conum FDG in dupla ratione ID ad HD (nam quadratum ID est triplum quadrati HD) quare Cylindrus KL est ad Conum FDG in tripla ratione ID ad HD, scilicet sicut segmentum AOPC ad segmentum MVZN. Sed demonstratum est quod segmento MVZN aequalis sit Conus FDG. Aequalis igitur est Cylindrus KL segmento AOPC: quod demonstrandum erat.

COROLLARIVM.

I. Dato segmento Cylindrum aequalem constituere in eadem altitudine.

Hinc elicitur, quod quadratum radij basis Cylindri aequalis segmento minus sit quadrato radij basis Hemisphaerij tertia parte quadrati axis eiusdem segmenti. Quare facili negotio constituitur Cylindrus aequalis cuicunque segmento Hemisphaerij dato, in eadem altitudine.

II. Dato segmento co-

Apparet etiam qua ratione constitui possit etiam Conus eiusdem altitudinis aequalis cuicunque segmen-

to dato. Dato enim segmento MVZN, fiat quadratum AD triplum quadrati MD, & ex quadrato AD subducto quadrato HD axis segmenti, reliqui quadrati latus erit radius basis Coni æqualis segméto MVZN dato, & eiusdem altitudinis.

num æqualem in eadem altitudine constituere.

Manifestum est etiam quòd omni Cylindro, cuius axis quadratum non sit maius quàm duplum radij basis eiusdem Cylindri, constitui possit segmentum hemisphærij æquale. Dato enim Cylindro KL, & diuiso axe eius ID in H, vt sit quadratum ID triplum quadrati HD, inuenietur FD æqualis radio basis Hemisphęrij, cuius segmentum eiusdem altitudinis æquale est Cylindro KL dato.

III. Dato Cylindro segmentum æquale in eadem altitudine cōstituere.

Cuicũque etiam Cono, cuius radij basis quadratũm non sit minus quàm duplum quadrati axis, constitui potest segmentum in eâdem altitudine æquale, quemadmodum dato cono FDG, cuius basis radij FH quadratum maius est quàm duplum quadrati axis HD; datum est FD, & ideo MD, cuius quadratum subtriplum est quadrati FD. Si vero quadratum FH fuerit duplum quadrati DH; sicut quadratum QE est quadrati ED; tunc Conus ille erit maximus in Hemisphęrio inscriptibilis, & nulla portio hemisphærij ei æqualis in eâdem altitudine constitui potest; Hemisphærium enim ei æquale erit, sicut ex istâ & pręcedente propositione manifestè apparet.

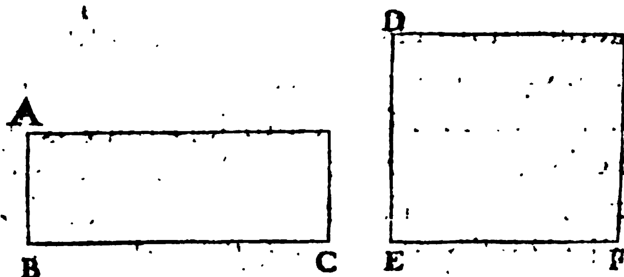
IV. Dato cono segmētum æquale eiusdem altitudinis facere.

Ex pręcedente etiam manifestum est quòd Hemisphęrium æquale sit solido annulari sphęrico eiusdem altitudinis; & ideo datę sphęrę constitui potest Annulus Sphęricus æqualis in quâcunque magnitudine da-

V. Datæ sphęræ annulũ sphæricum æquale in quacũque magnitudine constituere.

tâ; cuius demonſtrationem, quoniam facilis, breuitatis causâ omitto.

LEMMA.

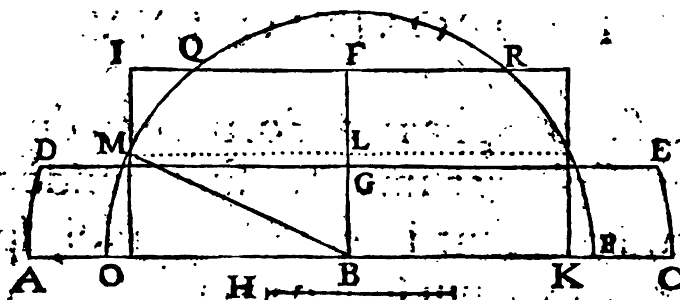


Sit Cylindrus datus A C & oporteat alium constituere æqualem in datâ altitudine D E: Fiat igitur ſicut D E ad A B altitudinem Cylindri dati, ita quadratum B C diametri baſis Cylindri A C ad quadratum E F; & facto circulo circa diametrum E F, conſtruatur Cylindrus D F. Quem dico æqualem eſſe Cylindro A C: Reciprocantur enim baſes & altitudines, ideo manifeſtum eſt.

PROPOSITIO LXIV.

Dato Hemiſphærij ſegmento, aliud æquale in datâ altitudine inuenire. Oportet autem quòd altitudo data non excedat radium Hemiſphærij æqualis dato ſegmento.

Sit ſeg-



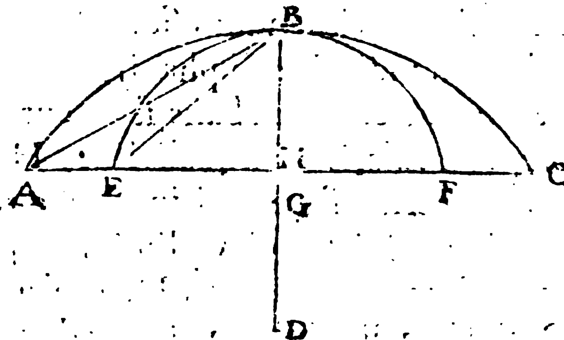
SIt segmentum datum ADEC cui aliud segmentum æquale constituendum sit in altitudine lineę H, quæ minor sit radio Hemisphærij, segmento dato æqualis. Sit igitur centrum basis segmenti B, a quo erigatur perpendicularis BF æqualis lineę H datę, secans planum superius segmenti in G, & circa axem GB segmenti concipiatur ei Cylindrus æqualis, cui etiam æqualis fiat alter Cylindrus IK in altitudine FB vel H. Diuisâ iam FB in L, vt sit quadratum totius triplum quadrati LB, transeat per L punctum planum basi AC parallelum secans latus Cylindri IK in M, & ex ductâ MB pro radio, fiat Hemisphærium circa centrum B, cuius segmentum OMQRP æquale erit Cylindro IK; & ideo etiam segmento dato ADEC, & in altitudine FB, vel H. quod faciendum erat.

Per 63. & Corol. eiusdem.

Per Lemma præcedens.

PROPOSITIO LXV.

Superficies Sphæricæ Portionum diuersarum Sphærarum, quæ ſunt eiuſdem altitudinis, ſunt inter ſe ſicut radij ſphærarum quarum ſunt partes.



SIt enim ABC portio Sphæræ, cuius centrum D, & radius BD, baſis planum AC, altitudo BH, & ſuper eodem plano & in eâdem altitudine conſiſtat alia portio Sphæræ EBF, cuius radius ſit BG; Dico ſuperficiem ſphæricam portionis ABC ad ſuperficiem ſphæricam portionis EBF ſe habere ſicut linea BD ad lineam BG. Ducantur enim lineæ AB & EB. Et quoniam circulus ex radio AB æqualis eſt ſuperficiei ſphæricæ portionis ABC; ſimiliter & circulus a radio EB æqualis eſt ſuperficiei ſphæricæ portionis EBF; erit ſicut quadratum AB ad quadratum EB, ita ſu-

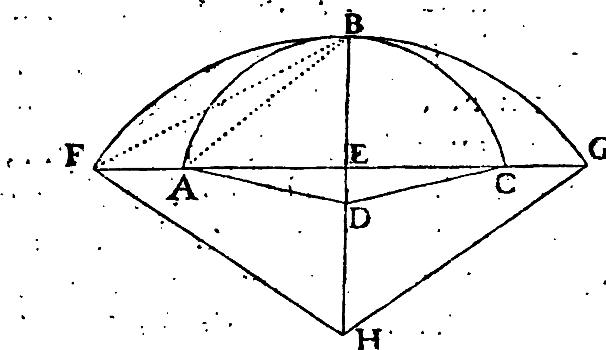
perficies

perficies ſphærica portionis ABC, ad ſuperficiem ſphæricam portionis EBF. Quadrato autem AB æquale eſt rectangulum ex duplâ BD in BH; & quadrato BE æquale eſt rectangulum ex duplo BG in BH; Quare, cùm eadem ſit altitudo BH, rectangula erunt inter ſe ſicut dupla BD ad duplam BG, hoc eſt ſicut BD ad BG. Quadrata igitur ſunt inter ſe in eâdem ratione; & ſuperficies Sphærica portionis ABC ad ſuperficiem ſphæricam portionis EBF, ſicut recta BD ad rectam BG, hoc eſt ſicut radius Sphæræ cuius eſt Portio ABC, ad radium ſphæræ cuius eſt Portio EBF; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXVI.

Sectores diuerſorum Hemiſphæriorum, quorum Portiones ſunt eiuſdem altitudinis, ſunt ad inuicem in duplicatâ ratione radiorum Sphærarum, quarum ſunt partes.

SIt planum FG, ſuper quo erigatur perpendicularis BE producta vſque in H, & facto H centro, & interuallo BH deſcribatur portio Sphæræ FBG, inſiſtens plano FG; ſumptoque vtcunque puncto D in axe BH (modò non ſit ſupra dimidium BE propiùs B quàm E) deſcribatur iterum circa illud alia portio Sphæræ ABC eiuſdem altitudinis & eidem inſiſtens plano FG; ductiſque iam rectis FH, GH, &



AD, CD, intelligantur facti Sectores F B G H, & AB-CD. Dico sectores istos F B G H, & A B C D, inter se esse in duplicatâ ratione axium suorum, hoc est in duplicatâ ratione B H ad B D. Ductis enim rectis F B & A B, supponantur Coni facti ex F B pro radio basis & altitudine B H; similiter ex A B radio basis & altitudine B D, qui aequales erunt Sectoribus F B G H, & A B C D.

38. lib. 1. Arch. de Sph. & Cylin.

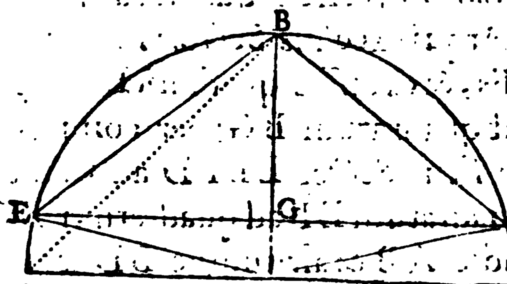
Et quoniam ratio Conorum ad inuicem composita est ex basibus & altitudinibus, erit & ratio sectoris F B-G H ad sectorem A B C D composita ex ijsdem, scilicet ex quadrato F B pro basi vnius ad quadratum A B pro basi alterius, & rectâ B H altitudine sectoris F B-G H ad rectam B D altitudinem sectoris A B C D. Sed in praecedente demõstratum est quòd superficies sphaerica portionis F B G, est ad superficiem sphaericam portionis A B C eiusdem altitudinis sicut H B radius Sphaerae cuius portio illa est ad B D radium sphaerae portionis A B C. Quare proportio Sectoris F B G H ad Sectorem A B C D composita est ex superficiebus in ratione B H ad B D, & ex ijsdem altitudinibus B H

ad B D.

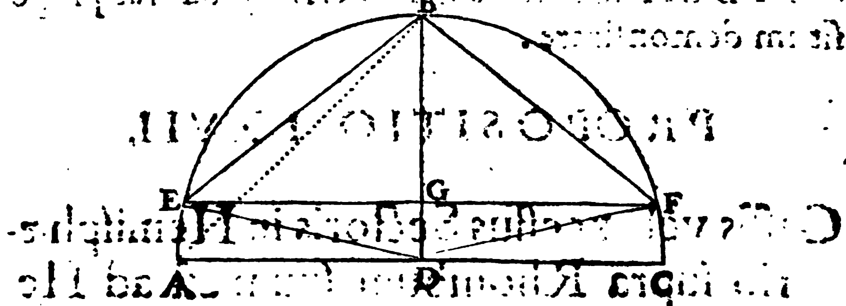
ad BD. In duplâ igitur ratione BH ad BD, est Sector FBGH ad Sectorem ABCD; quod erat propositum demonstrare.

PROPOSITIO LXVII.

Cassis vel excessus Sectoris in Hemisphærio supra Rhombum suum est ad Hemisphærium sicut quadratum altitudinis eiusdem Cassidis ad duplum quadrati axis Hemisphærij.



Sit enim in Hemisphærio ABC, Sector EBFD, diuisus plano per EF ad basim AC parallelo, secante etiam axem BD, in puncto G. Dico partem solidam EBF sphæricâ superficie tectam portionis EBF, intra verò excauatam superficie conicâ Coni EBF (quã Cassidem vocamus) esse ad Hemisphærium ABC, sicut quadratum lineæ BG scilicet altitudinis eiusdem Cassidis, ad duplum quadratum BD vel quadratũ AB.



Cum enim Sector E B F D sit æqualis Cono ex radio E B & altitudine B D; Rhombus verò E B F D sit æqualis Cono ex radio E G & eâdem altitudine B D; igitur Sector E B F D erit ad Rhombum E B F D sicut basis ad basim, vel sicut quadratum E B ad quadratum E G. Atqui excessus Sectoris supra Rhombum est ipsa Cassis, & excessus quadrati E B supra quadratum E G est quadratum B G; per conuersionem igitur rationis sicut Sector E B F D ad Cassidem suum E B F, ita quadratum E B ad quadratum B G. Rursus Conus ex radio A B & altitudine B D æqualis est Hemisphærio; Ergo Sector EBFD erit ad Hemisphæriũ A B C, sicut quadratum E B ad quadratum A B. Ex æquali igitur erit sicut Cassis E B F ad Hemisphærium A B C, ita quadratum altitudinis ipsius Cassidis scilicet lineæ B G, ad quadratum A B, vel ad duplum quadrati axis Hemisphærij; quod erat propositum demonstrare.

COROLLARIUM.

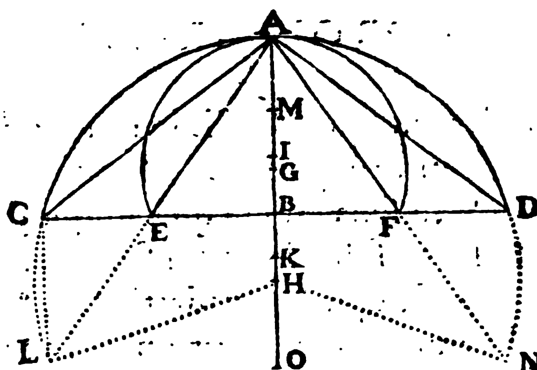
Hinc euidens fit, quod Cassis in ratione datâ ad Hemisphærium constitui possit, modò ratio non excedat subduplam; & ad sphæram in quâcunque datâ ratione minore. In Hemisphærio enim fiat quadratum BG in ratione datâ ad duplum quadrati BD; & Cassis erit ad Hemisphærium in eâdem ratione. In Sphærâ verò quadratum altitudinis ad quadruplum quadrati radij, vel ad quadratum diametri Sphæræ constituendum est in ratione datâ; & tunc Cassis in eâdem ratione erit ad Sphæram cuius pars ipsa est. In demonstrando verò occurret sector ille hemisphærio maior, de quo in secundo Coroll. Prop. 14. loquuti sumus.

PROPOSITIO LXVIII.

Cassides eiusdem altitudinis sunt ad inuicem sicut Radij Sphærarum quarum sunt partes.

SVnto enim circa axem AB duæ Cassides CAD, EAF eiusdem altitudinis, & sint radij sphærarum quarum ipsæ sunt partes rectæ AH & AG; & fiat sicut HA ad BA ita BA ad IA; & iterum sicut GA ad BA, ita BA ad KA.

Et quoniam sunt duæ series proportionalium, & in vtraque, linea BA est media, erit rectangulum HA



in IA æquale rectangulo GA in KA; & ideo ſicut HA ad GA, ita KA ad IA. Sed cum proportio Hemiſphærij, cuius radius HA ad Caſſidem CAD, ſit ſicut duplum quadrati HA ad quadratum BA; erit dimidium eiuſdem Hemiſphærij ad eandem Caſſidem ſicut quadratum HA ad quadratum BA, vel ſicut linea HA ad lineam IA; ſimiliter monſtrabitur quòd dimidium Hemiſphærij ex radio GA erit ad Caſſidem EAF ſicut GA ad KA: Fiat iam ſicut HA ad GA, ita GA ad MA.

67. huius.

Cum igitur proportio dimidij Hemiſphærij ex radio HA ad ſuam Caſſidem CAD, hoc eſt lineæ HA ad lineam IA, compoſita ſit ex ratione HA ad GA (ſcilicet axium) GA ad KA, (dimidij hemiſphærij ex radio GA ad Caſſidem ſuam EAF) & KA ad IA (ratione etiam axium) videlicet ex duplâ ratione axis HA ad axem GA, & ratione GA ad KA: Proportio verò eiuſdem dimidij hemiſphærij ex radio HA ad Caſſidem EAF, componitur ex ratione ſuâ ad Caſſidem ſimilem Caſſidi EAF ex eodem radio HA, vi-

deli-

delicet ad Cassidem L A M, hoc est ex ratione lineæ G A ad K A, & ex ipsius Cassidis L A N ratione ad Cassidem E A F ei similem, id est ex triplâ ratione radiorum ad inuicem H A ad G A. Quare reductis rationibus compositis ad minimos terminos, erit composita ex duplâ ratione H A ad G A & ratione G A ad K A eadem quæ simplâ ratio H A ad G A & H A ad K A, scilicet quadrati H A ad rectangulum GAK; & composita ex triplâ ratione H A ad G A; & ratione G A ad K A, est eadem quæ dupla ratio H A ad G A (scilicet H A ad M A) & H A ad K A, hoc est sicut quadratum ex H A ad rectangulum MAK. Quare cum idem quadratum H A sit ad rectangulum GAK sicut dimidium Hemisphærij ex radio H A ad Cassidem C A D, & ad rectangulum MAK sicut idem dimidium Hemisphærij ad Cassidem E A F, oportet quod Cassis C A D sit ad Cassidem E A F, sicut rectangulum G A K ad rectangulum M A K, hoc est sicut linea G A ad lineam M A, vel sicut radius H A ad radium G A. Sunt igitur Cassides eiusdem altitudinis in ratione radiorum Sphærarum suarum, quarum sunt partes; sicut demonstrandum erat.

COROLLARIVM.

Hinc colligitur quòd Sphæra etiam circa eundem axem A B, scilicet altitudinem Cassidis, sit ad Cassidem, in ratione radij eiusdem sphæræ, ad radium sphæræ cuius pars illa Cassis est.

I. Sphæra ad Cassidē eiusdem altitudinis sicut radius ad radium sphæræ cuius pars illa cassis est.

Patet

II. Caſſides eiuſdem altitudinis in ratione ſuperficierum ſphæricarum.

Patet etiam quod Caſſides, ſiue ſint eiuſdem ſphæræ, ſiue diuerſarum, ſint ſemper ad inuicem in ratione compoſitâ ex ſuperficiebus ſphæricis, & altitudinibus. Nam ſi ſint eiuſdem altitudinis ſunt in ratione ſuperficierum ſphæricarum. Suppponantur enim in figura præcedente omnia ſecari plano per axem AB: manifeſtum eſt iam rectangulum ex duplâ AH in AB æquale eſſe quadrato AC; rectangulum etiam ex duplâ AG in eandem AB æquale quadrato AE; quapropter quadratum AC ad quadratum AE ſe habet ſicut dupla AH ad duplam AG, hoc eſt ſicut AH ad AG; & ideo per demonſtrata erit Caſſis CAD ad Caſſidem EAF, ſicut quadratum AC ad quadratum AE, vel ſicut ſuperficies Sphærica Caſſidis CAD ad ſuperficiem ſphæricam Caſſidis EAF. Producatur iam axis AH, & fiat ſicut AG ad AH, ita AB ad AO; & erit AO altitudo Caſſidis LAN; & manifeſtum eſt quòd ratio Caſſidis LAN ad Caſſidem EAF ſui ſimilem ſit etiam compoſita ex ſuperficiebus & altitudinibus; ſunt enim in triplicatâ ratione radiorum AH ad AG: quadratum enim AL ad quadratum AE eſt dupla ratio AH ad AG, vel AO ad AB; ſed ſuperficies earum ſphæricæ ſunt ſicut quadrata AL & AE; & ideo ſunt in ratione compoſita ſicut dictum eſt.

III. Caſſides eiuſdem ſphæræ in ratione cōpoſita ex ſuperficiebus & altitudinibus.

Sed ſint eiuſdem Sphæræ, ſicut Caſſis LAN ad Caſſidem CAD; Dico etiam rationem eſſe compoſitam ex ſuperficiebus & altitudinibus earum. Ducatur enim linea CL; & quoniam peripheria AD æqualis eſt peripheriæ AC, erit angulus ALC æqualis angulo ACE, & angulus A communis; ideo triangula ALC

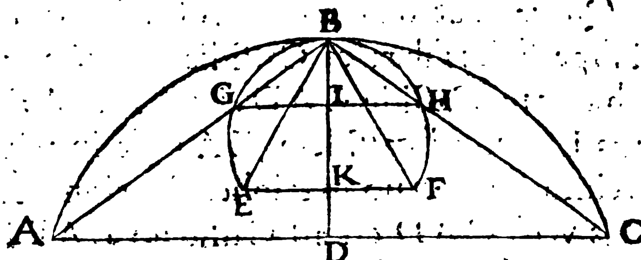
& ACE

& ACE sunt similia; & sicut AL ad AC, ita AC ad AE: Quare sicut quadratum AL ad quadratum AC, vel superficies sphærica Cassidis LAN ad superficiem sphæricam Cassidis CAD, ita AL ad AE. Sed cùm cassis LAN ad cassidem EAF sit in triplicatâ ratione axium, erit etiam in triplicatâ ratione AL ad AE, Cassis verò CAD est ad Cassidem EAF in ratione axium, vel AL ad AE. Deducta igitur simplâ ratione axium ex triplâ, quæ remanet, scilicet dupla ratio AL ad AE, est ratio Cassidis LAN ad cassidem CAD. Sed demonstratum est quod superficies earum sphæricæ sunt in ratione AL ad AE, & altitudines etiam in eâdem. Composita igitur est ratio Cassidum in eâdem sphærâ inter se, ex ratione superficierum suarum sphæricarum, & altitudinum; quod oportuit demonstrare.

PROPOSITIO LXIX.

Ratio Casſidum ex diuersis sphæris & in diuersis altitudinibus consistentium, componitur ex duplâ ratione axium Sphærarum, quarum sunt partes, & ex ratione altitudinum.

SInt duæ Caſsides ABC & EBF, diuersarum sphærarum partes, & in diuersis altitudinibus consistentes, quæ ob commodum demonstrationis, circa eundem axem, & tangentes in polo B constituantur; & secentur ambæ per axem BD, in quo sit BK altitudo

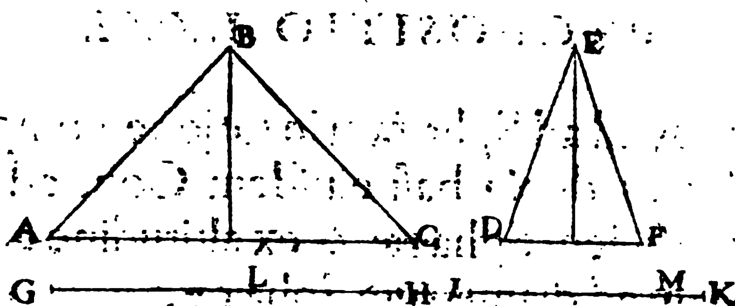


Casſidis E B F, & ducta ſit G I H per interſectionem lineæ A B cum periphæria B E, ſecans axem in I. Quoniam igitur ratio Casſidis A B C ad Casſidem E B F componitur ex ratione ipſius ad Caſsidem G B H, hoc eſt ex triplâ ratione A B, ad G B (ſunt enim ſimiles,) & ex Caſside G B H ad Caſsidem E B F hoc eſt ex ratione I B ad K B; Eſt autem ſicut A B ad G B, ita radius ad radium, & ita D B ad I B; componitur itaque ratio Casſidis A B C ad Casſidem E B F, ex triplâ ratione B D ad I B, & ratione I B ad K B, hoc eſt ex duplâ ratione B D ad I B, videlicet axium, & ratione D B ad K B, ſcilicet altitudinum. Ratio igitur Caſsidum ex diuerſis Sphæris & diuerſis altitudinibus componitur ſicut in propoſitione enunciatum eſt.

PROPOSITIO LXX.

Coni eiuſdem altitudinis ſunt inter ſe in ratione reliquarum diametrorum Sphærarum, in quibus ſunt inſcriptibiles.

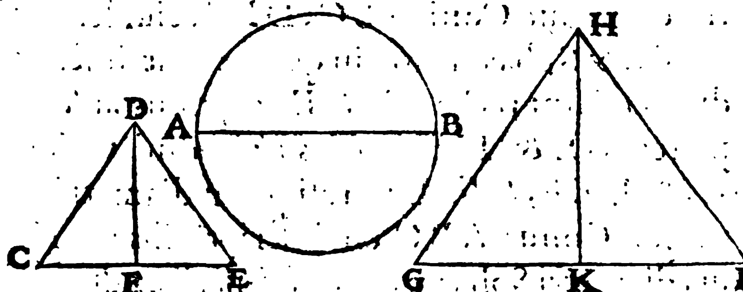
Sint



SInt enim duo Coni ABC, DEF, eiusdem altitudinis; & Sphærarum, in quibus sunt inscriptibiles, diametri sint rectæ GH & IK, a quibus abscindantur partes GL & IM æquales altitudini Conorum ABC, & DEF; & sit LH reliquum diametri Sphæræ, in quâ Conus ABC est inscriptibilis; MK vero reliqua diametri Sphæræ, in quâ inscribendus est Conus DEF. Dico conum ABC esse ad conum DEF, sicut LH ad MK. Quoniam enim Coni ABC, & DEF sunt in eâdem altitudine; sunt inter se sicut bases, hoc est sicut quadratum AC ad quadratum DF, vel sicut rectangulum HLG ad rectangulum KMI; quæ, quoniam GL æqualis est IM, sunt in ratione LH ad MK, quæ sunt reliquæ diametrorum sphærarum in quibus coni ABC & DEF sunt inscriptibiles. Coni igitur eiusdem altitudinis, sunt inter se in ratione reliquarum diametrorum sphærarum, in quibus sunt inscriptibiles.

PROPOSITIO LXXI.

Conus eſt ad Sphæram in ratione compoſitâ ex duplâ baſi eiuſdem Coni ad ſuperficiem Sphæræ, & ex altitudine eiuſdem ad diametrum Sphæræ.



ESto ſiquidem Sphæra A B & conus C D E cuius axis D F; Dico Conum C D E ad ſphæram A B, eſſe in ratione compoſitâ ex duplâ baſi C E ad ſuperficiem ſphæræ A B, hoc eſt ad circulum ex radio æquali diametro ſphæræ A B; & ex altitudine Coni D F ad ipſam diametrum ſphæræ A B: Fiat enim Conus G H I cuius baſis ſit æqualis dimidiæ ſuperficiei ſphæræ, altitudo vero eadem quæ diametri A B ſphæræ; & manifeſtum eſt quòd Conus ille æqualis erit ſphæræ A B.

Et quoniam Conus C D E eſt ad conum G H I in ratione compoſitâ ex baſi C E ad baſim G I, & altitudine D F ad altitudinem H K; Conus vero G H I factus eſt æqualis ſphæræ A B; ratio igitur Coni C D E

ad

ad ſphæram A B componitur ex ratione baſis C E coni C D E ad baſim G I coni G H I, & altitudine D F, ad altitudinem H K, vel diametrum A B ſphæræ; Sed baſis Coni G H I facta eſt æqualis dimidiæ ſuperficiei ſphæræ, & eadem eſt ratio baſis C E coni C D E ad dimidiam ſuperficiem, quæ duplæ baſis ad totam ſuperficiem ſphæræ; Quare ratio coni C D E ad ſphæram A B componitur ex ratione duplæ baſis eiuſdem C E ad ſuperficiem ſphæræ A B, & altitudinis coni D F ad diametrum ſphæræ A B.

COROLLARIVM.

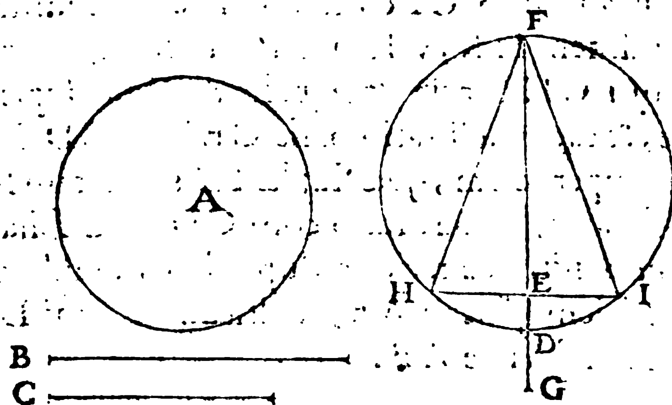
Ex hoc ſequitur quod ſi Conus & ſphæra ſint eiuſdem altitudinis, conus erit ad ſpheram ſicut dupla baſis coni ad ſuperficiem ſpheræ.

PROPOSITIO LXXII.

Inuenire Portionem ſphæræ eiuſdem altitudinis, in ratione datâ maiore ad datam ſphæram.

SIt enim ſphera A data, ratio vero quam habet B ad C, & oporteat inuenire portionem ſphæræ in altitudine diametri Sphæræ A, quæ habeat rationem lineę B ad lineam C. Fiat igitur ſicut C ad B; ita diameter ſphæræ A ad lineam F G, & quoniam F G, maior eſt diametro ſphæræ A, abſcin-

datur



datur ab eâ pars F E æqualis diametro ſphęræ A; & diuisâ reliquâ E G in tres partes æquales, quarum E D ſit vna; fiat circa diametrum F D, ſphęra H F I D, quâ ſectâ plano per E ad diametrum recto, eius portio HFI erit eiuſdem altitudinis cum Sphęrâ: Dico portionem H F I eſſe ad ſphęram A, ſicut linea B ad lineam C.

Ductis igitur rectis H F & F I, concipiatur Portio H F I, compoſita ex Cono & Caſside; Conus vero HFI ad ſphęram A eiuſdem altitudinis (cùm habeat rationem compoſitam ex duplâ baſi Coni ad ſuperficiem ſphęræ, & altitudine eiuſdem Coni ad diametrũ ſphæræ) eſt ſicut duplum quadratum H E ad quadratum F E. Iterum Caſsis H F I eſt ad ſphęram A eiuſdem altitudinis, ſicut DF ad diametrum ſphęrę A, hoc eſt lineam F E, vel ſicut rectangulum D F E vel quadratum H F ad quadratum F E; Conus igitur & caſsis, hoc eſt Portio H F I, ad ſphęram A, habet rationem quam habent ſimul duplum quadrati H E vnà cum

7 1. huius & Coroll.

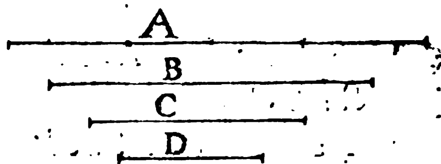
Coroll. 1. Prop. 68. huius.

qua-

quadrato H F, ad quadratum F E. Sed rectangulum D F E æquale est quadrato H F; Rectangulum verò ex G D in E F æquale est duplo quadrato H E; Totum igitur rectangulum G F E, æquale est quadrato H F, vnà cum duobus quadratis H E, & ideo ad quadratum F E, ſicut Portio H F I ad ſphęram A: Sed ſicut rectangulum G F E ad quadratum F E, ita eſt linea GF ad lineam F E, hoc eſt B ad C. Portio igitur H F I ad ſphęram A, conſtituta eſt in eâdem altitudine & in ratione datâ B ad C, ſicut oportuit, & quod faciendum erat.

LEMMA.

Si ſint quatuor lineæ continuè proportionales, Solidum quod fit ex quadrato alterutrius extremarum in alteram extremam, æquale eſt Cubo ex mediâ proportionali quæ propinquior eſt ei ex quâ fit quadratum.

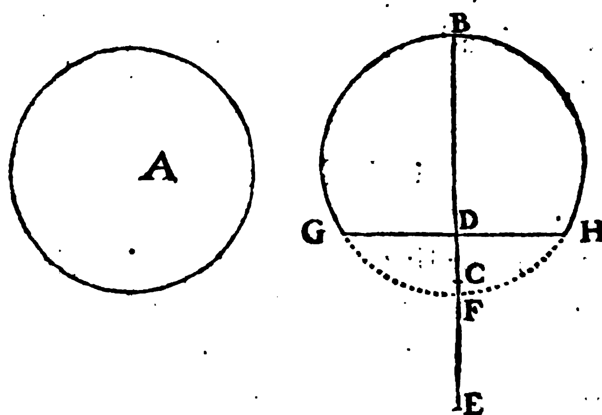


Sint enim quatuor lineæ cõtinuè proportionales A, B, C, & D, & quoniam ſunt continuè proportionales, erit ſicut quadratum A ad quadratum B, ita linea B ad lineam D; dupla enim eſt ratio B ad D, quæ A ad B: Quare ſi fiat ſolidum ex quadrato A in lineam D erit æquale Cubo ex linea B. Reciprocabuntur enim baſes & altitudines. Similiter etiam demonſtrabitur ſi fiat ſolidum ex quadrato D in A; quod Cubus ex linea C ei æqualis erit.

PRO-

PROPOSITIO LXXIII.

Sphæræ datæ Portionem æqualem in quâcunque altitudine minore exhibere.



Sit Sphæra data A, cuius diametro æqualis fiat recta BC, & in eâ ſumatur vtcunque punctum D, & ſit BD pro altitudine Portionis exhibendæ æqualis datæ ſphæræ A. Productâ lineâ BC, fiat ſicut quadratum BD ad quadratum BC, ita linea BC ad lineam BE. Diuiſâ iam DE in tres partes æquales, quarum DF vna, fiat FB diameter, circa quam deſcripta Sphæra, & ſecta plano ad diametrum recto per punctum D, faciat portionem GBH in altitudine BD. Dico Portionem GBH eſſe æqualem ſphæræ datæ A.

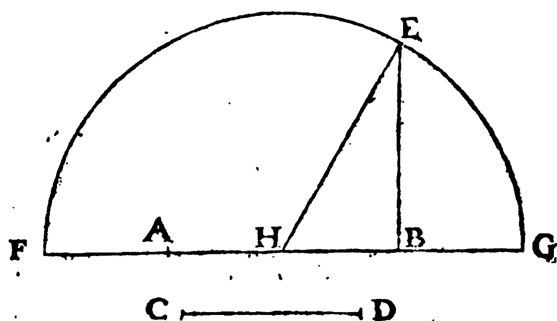
Quo-

Quoniam enim demonſtratum eſt quòd ſicut BE ad BD, ita eſt portio GBH ad Sphæram ex diametro BD; & quoniam factum eſt ſicut quadratum BD ad quadratum BC, ita linea BC ad lineam BE; erit ſolidum ex quadrato BD in latus BE æquale cubo ex BC. Sed ſolidum ex quadrato BD in BE, eſt ad cubum ex BD, ſicut linea BE ad lineam BD; Quare & cubus ex BC ad cubum ex BD, eſt ſicut BE ad BD, vel ſicut portio GBH ad ſphæram ex diametro BD. Sphæræ autem inter ſe ſunt ſicut Cubi ex earum diametris; ideoque ſphæra ex diametro BC eſt ad ſphæram ex diametro BD, ſicut linea BE ad lineam BD; hoc eſt ſicut portio GBH, ad ſphæram ex diametro BD. Sphæra igitur ex diametro BC, hoc eſt Sphæra data A, æqualis eſt portioni GBH; quod faciendum erat.

LEMMA.

Datâ differentiâ laterum rectanguli, & mediâ proportionali inter latera, inuenire latera.

SIt data AB recta differentia laterum rectanguli quæſiti, CD verò media proportionalis inter latera. Lineæ itaque AB applicetur ad angulos rectos linea BE æqualis rectæ CD datæ, & diuisâ bifariam AB in H, ducatur linea HE, & facto centro H, & interuallo HE, deſcribatur ſemicirculus occurrens lineæ AB productæ in vtramque partem in punctis F, & G. Dico FB, & BG, eſſe latera rectanguli quæſita,



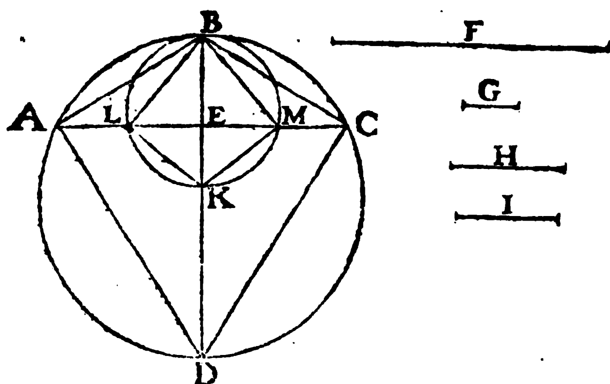
Cùm enim AH sit æqualis HB; & FH æqualis HG, subtractis æqualibus AH & HB, quæ remanent FA & BG æquales inter se erunt. Quare excessus FB supra BG, est ipsa AB data; sed BE etiam æqualis est datæ CD, & est media proportionalis inter FB & BG; latera igitur rectanguli quæsita sunt ipsa FB, & BG.

PROPOSITIO LXXIV.

Dato Rhombo in Sphærâ inscripto, alium in datâ ratione inuenire, qui sit inscriptibilis Sphæræ, & cuius Coni superioris altitudo sit æqualis altitudini superioris Coni in Rhombo dato.

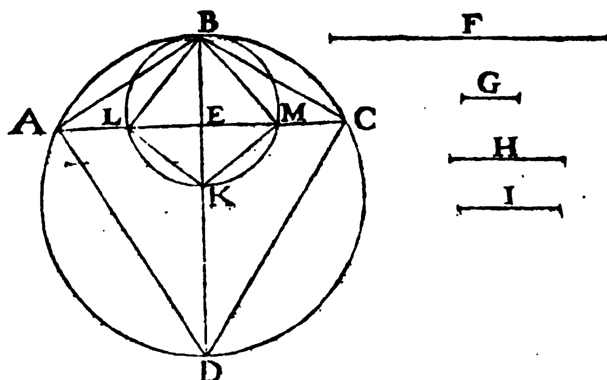
SIt enim Rhombus datus ABCD in sphærâ inscriptus, & sit ratio data F, ad G, in qua inueniendus sit alius Rhõbus in sphærâ inscriptibilis, & cuius superioris Coni altitudo sit eadem cum Cono ABC Rhombi dati, scilicet lineæ BE. Fiat igitur linea H media

pro-



proportionalis inter F & G; & sicut F ad H, ità in plano per axem sit linea AD rectæ I: datâ iam I mediâ proportionali, & BE differentiâ, quærantur extremæ, quarum maiori fiat BK æqualis; (si maior fuerit ratio F ad G; si verò minor fuerit ratio, tunc producatur axis, & in axe producto quæratur punctum K;) inuento autem puncto K, circa BK, constituatur sphæra & in eâ inscriptus Rhombus LBMK. Dico Rhombum ABCD esse ad Rhombum LBMK sicut est linea F ad lineam G. Lemma præced. 6s.

Quoniam enim Rhombus ABCD compositus est ex duobns Conis ABC & ADC, quorum basis communis est ex radio AE, amborum verò altitudo est axis sphæræ BD; Conus igitur ex radio basis AE & altitudine BD, æqualis erit Rhombo dato ABCD; Similiter & Conus ex radio basis LE, & altitudine BK, æqualis erit Rhombo LBMK. Coni autem, cùm sint ad inuicem in ratione compositâ ex basibus & altitudinibus, erunt inter se in ratione compositâ ex quadrato AE ad quadratum LE, & lineâ BD ad lineam



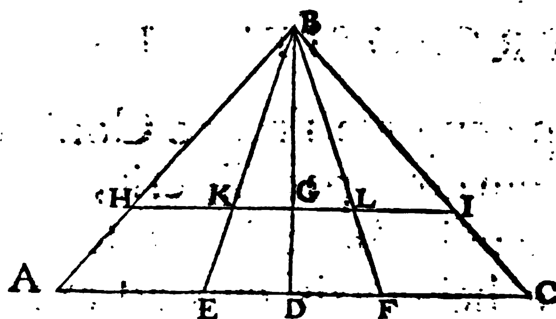
BK. Quadrato verò AE æquale est rectangulum BED; & quadrato EL æquale est rectangulum BEK. Sed rectangula, cùm habeant communem altitudinem BE, sunt inter se sicut reliqua latera, scilicet in ratione ED ad EK; quare Quadratum AE ad quadratum LE, se habet sicut linea ED ad lineam EK; & Rhombus ABCD erit ad Rhombum LBMK in ratione compositâ ex BD ad BK, & ED ad EK; hoc est sicut rectangulum BDE ad rectangulum BKE; vel sicut quadratum AD ad quadratum LK. Sed linea LK æqualis est lineæ I; factum est enim rectangulum BKE æquale quadrato I; & linea AD est per constructionem ad lineam I, sicut F ad H. Quare quadratum ex AD ad quadratum ex I, vel ad quadratum ex LK, est sicut linea F ad lineam G. Rhombus igitur ABCD est ad Rhombum LBMK, sicut F ad G; quod faciendum erat.

Quicquid de Rhombis in sphærâ vel Hemisphærio inscribendis, vel de ratione eorum inter se, vel ad sphæras aut Hemisphæria, in quibus inscribendi sunt, di-

cen-

cendum restat, adeo facile est, vt primo intuitu cuiuis appareat: sunt enim omnes inter se sicut bases Conorum suorum, & ad sphæras vel Hemisphæria in quibus sunt inscripti, sunt sicut bases Conorum suorum ad duplum maximum circulum eiusdem sphæræ, vel ad duplam basim Hemisphærij, ab his ergo desistam ne tædium lectori pariam.

LEMMA.



Constituantur duo Coni A B C & E B F, circa eundem axem B D, & super eodem plano A C; & sint ambo secti plano H I basi A C parallelo; Dico Conos A B C, & E B F, secari a plano H I in eâdem ratione.

Quoniam enim Conus HBI similis est Cono ABC, erit Conus H B I ad conum A B C, in ratione triplâ axium suorum B G & B D; sed Conus K B L etiam similis est cono E B F, & constituti sunt circa eosdem axes B G & B D; quare sunt etiam in triplâ ratione axium B G & B D; & ideo sicut Conus H B I ad co-

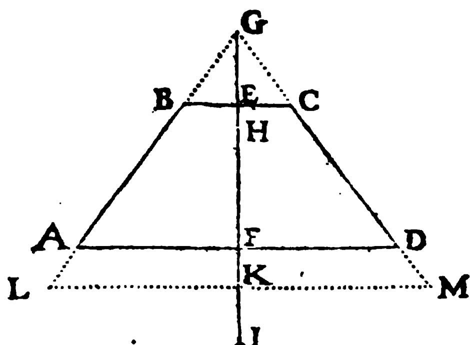
num ABC, ita conus KBL ad conum EBF; & diuidendo, ſicut conus HBI ad truncum AHIC, ita conus KBL ad truncum EKLF. Secti ſunt igitur in eâdem ratione.

Manifeſtum eſt etiam, quòd ſi pluribus ſecti fuerint planis ad baſim AC parallelis, etiam omnes trunci intermedij in eâdem ratione erunt ad Conos integros, vel ad quaſlibet eorum partes. Omnes igitur Coni circa eundem axem conſtituti ſecti ſunt in eâdem ratione ijſdem planis baſi parallelis.

PROPOSITIO LXXV.

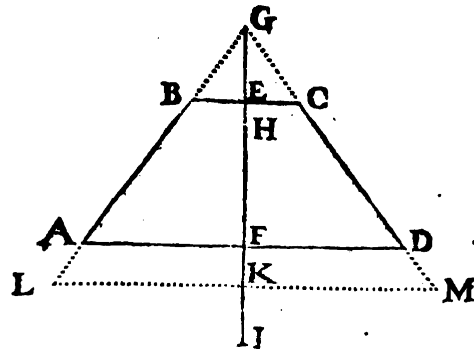
Dato quocunque Trunco Coni, inuenire Conum cuius pars ille erit, & ad quem Truncus ille habebit eandem rationem quam habet axis eius ad axem Coni quæſiti.

SIt Truncus ABCD datus, cuius axis EF concipiatur productus vſque ad verticem G Coni, cuius pars ille truncus eſt; & fiat ſicut FG ad EG, ita EG ad EH. Rurſus producatur axis EF in alteram partem, quantum opus, & fiat FI æqualis GH; & inter GF & GI, fiat GK media proportionalis; & per punctum K, tranſeat planum baſi AD parallelum, ad quod producatur truncus Coni, & cõpleatur Conus LGM. Dico iam Conum LGM eſſe conum quæſitum, ad quem Truncus datus ABCD, habet eandem



rationem quam habet axis trunci E F ad G K axem Coni L G M. Quoniam enim ſicut A D ad B C, vel A F ad B E, ita eſt F G ad G E, & ita G E ad E H; erit G H aggregatum ſecundæ & tertiæ, quarum F G prima in ratione A F ad B E; & quoniam F I facta eſt æqualis G H, erit G I aggregatum trium proportionalium in eâdem ratione, quarum F G maior. Iterum cum ſit alia ſeries proportionalium quarum G I maior, F G minor, K G verò media; ſi facto centro G, & radio vel axe K G, deſcriptum fuerit Hemiſphærium ſectum planis per F, & E, baſi parallelis, ſegmentum intermedium inter plana per F & E, erit ad Hemiſphærium ſicut axis E F ſegmenti, ad axem Hemiſphærij G K. Exceſſus enim triplæ G I ſupra tres proportionales priores, videlicet ſupra rectam G I aggregatum ipſarum; hoc eſt dupla G I, ad duplam GI, eſt ratio quam habet ſegmentum intermedium ad ſectorem ſecundum eiuſdem ſuperficiei ſphæricæ, & inter eadem plana interceptum. Quare ſegmentum illud erit ad Hemiſphærium ſicut E F ad G K. Iterum ex Corollario 2. propoſitionis 27. apparet, quòd ſimi-

Vide Propoſit. 26. & 27. huius.



liter Conus rectangulus ijsdem planis sectus, habebit eandem rationem ad frustum suum intermedium inter eadem plana parallela interceptum, quam habet axis ad axem, & per praecedens Lemma demonstratur quòd omnes Coni circa eundem axem & super eâdem basi constituti, secti sint ijsdem planis in eâdem ratione. Quare Truncus A B C D, erit in eâdem ratione ad Conum L G M, ac si esset Conus rectangulus, hoc est sicut E F ad G K. Inuentus est igitur Conus LGM, ad quem Truncus datus A B C D habet rationem, quam habet axis eius E F, ad axem G K Coni L G M, quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

Hinc manifestum est quòd Conus secari possit ita, vt truncus intermedius sit ad Conum datum in ratione datâ.

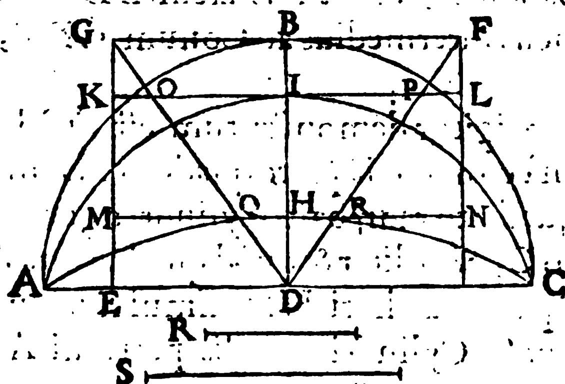
Insuper & aliæ sectiones Hemisphærij excogitari poterunt: quæ ex præmissis Coni & Hemisphærij sectionibus dependent, ita vt in ratione datâ ad Hemisphæ-

rium,

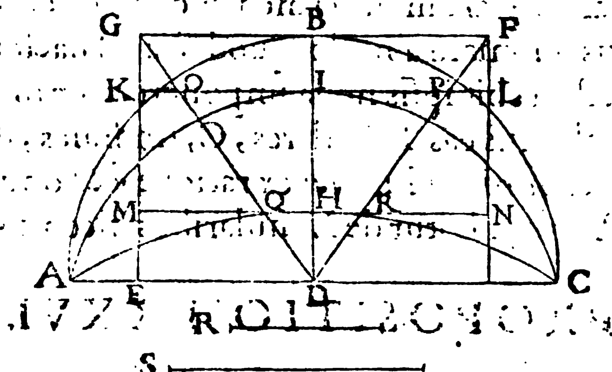
rium, partes ipsarum intermediæ constituendæ sint; de quibus quoniam a nullo (quod sciam) hactenus tractatum est, licebit ipsis noua imponere nomina? Ideoque vocabimus eas Lunulares, Cylindrales, & Campanales, ex similitudine vel ex ratione sectionum ipsarum. Primum igitur de Lunularibus dicemus.

PROPOSITIO LXXVI.

Lunulare Segmentum intermedium in ratione datâ ad Hemisphærium constituere.



SIt ratio data quam habet linea R ad lineam S, & sit Hemisphærium ABC, cuius axis BD, circa quem constituatur Cylindrus EF, cuius basis ex radio ED sit dimidia basis Hemisphærij AD, & ideo Cylindrus EF, cùm sit eiusdem altitudinis cum Hemisphærio, erit ad Hemisphærium ABC in ratione sub-



ſeſquitertia. Inſcribatur igitur in Cylindro E F conus GDF, & erunt ſimul Cylindrus E F cum Cono GDF æquales hemiſphærio ABC. Secetur iam Conus GDF, & Cylindrus E F, duobus planis K L & M N, ad baſim G F parallelis, ſecantibus axem B D ita in I & H, vt ſit Truncus intermedius ad Conum GDF, ſicut R ad S.

Coroll. Prop. 75.

Quoniam igitur demonſtratum eſt quòd quadratum AD vnà cum tertiâ parte quadrati BD, ſint æqualia duplo quadrato radij baſis Cylindri æqualis Hemiſphærio ABC; Similiter & quòd quadratum AD vnà cum tertiâ parte quadrati HD, ſimul ſint dupla quadrati radij baſis Cylindri æqualis portioni AHC, & eiuſdem altitudinis: Similiter etiam quod quadratum AD cum tertiâ parte quadrati ID, ſimul dupla ſint quadrati radij baſis Cylindri æqualis, & eiuſdem altitudinis cum portione AIC: Cùm inquam hæc omnia ſint dupla; erunt quadratum ED, quod dimidium eſt quadrati AD, vnà cum ſextis partibus quadratorum ſingularum rectarum BD, HD, & ID,

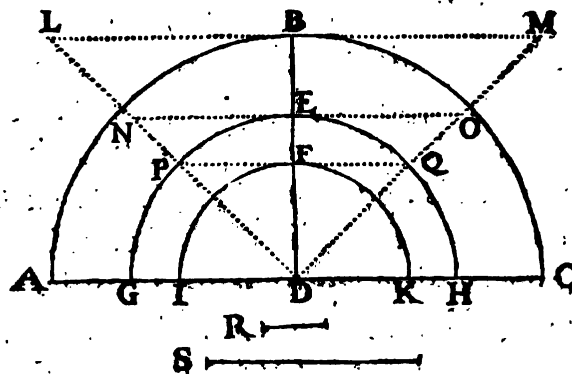
58. huius.

æqua-

æqualia ſingulis quadratis radiorum baſium Cylindrorum æqualium; & habentium eandem altitudinem cum ſingulis portionibus A B C, A I C & A H C. Vnde manifeſtum eſt, quòd, cùm Cylindrus E F cum Cono G D F, (qui cum ſit tertia pars ipſius E F Cylindri, erit ſexta pars Cylindri ex radio B D, & altitudine eadem B D) ſit æqualis Hemiſphærio A B C; quòd Cylindrus E L vnà cum cono O D P, (qui etiam eſt ſexta pars Cylindri ex radio I D & eâdem altitudine) ſint etiam æquales portioni A I C. Simili ratione demonſtrabitur, quòd Cylindrus E N vnà cum cono Q D R ſint æquales portioni A H C. Deductis igitur ex Portione A I C, portione A H C, & ex Cylindro A L cum cono O D P, Cylindro E N cum Cono Q D R, quod remanet, ſcilicet ſegmentum Lunulare intermedium A I C H, æquale erit Cylindro M L, vnà cum trunco Coni intermedio O Q R P. Sed Truncus intermedius O Q R P eſt ad Conum ſuum G D F, ſicut linea I H ad lineam B D; & Cylindrus intermedius M L, eſt ad Cylindrum totum E F, ſicut eadem I H ad eandem B D; componendo igitur, Truncus O Q R P cùm Cylindro M L ſimul, ad Conum G D F cum Cylindro E F, hoc eſt ad Hemiſphærium A B C, eſt ſicut linea I H ad lineam B D. Ex æquali ergo Segmentum Lunulare intermedium A I C H erit ad Hemiſphærium A B C, ſicut linea I H ad lineam B D, vel ſicut linea R ad lineam S; quod faciendum erat.

PROPOSITIO LXXVII.

Segmentum Campanale in ratione datâ ad Hemisphærium constituere.



SIt Hemisphærium ABC, cuius axis BD, & sit ratio data R ad S, in quâ constituendum sit Segmentum Campanale ad Hemisphærium ABC. Concipiatur circa axem BD Conus rectangulus cuius vertex D, ita sectus duobus planis parallelis basi, vt sit truncus eius intermedius ad totum Conum, sicut linea R ad lineam S; & sint E, & F, in axe BD puncta intersectionum planorum cum axe. Fiant iam duo Hemisphæria circa centrum D ex radijs DE & DF, quæ sint GEH & IFK. Signetur Conus rectangulus LDM, & intersectiones planorum cum ipso Cono rectangulo sint NO & PQ.

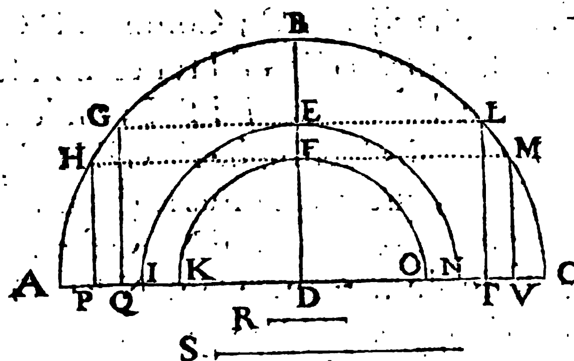
Quoniam igitur Conus rectangulus LDM, est dimidium Hemisphærij ABC; Conus NDO etiam erit dimidium hemisphærij GEH; nec non & Conus PDQ dimidium hemisphærij IFK; vnde manifestum est quòd excessus Hemisphærij GEH supra Hemisphærium IFK, quem vocamus segmentum Campanale, sit duplum excessûs Coni NDO supra Conum PDQ, hoc est duplum trunci Coni NPQO. Quare in eâdem ratione erit ad Hemisphærium ABC, quâ Truncus Coni NPQO ad Conum suum LDM; hoc est sicut EF ad BD, vel R ad S; quod faciendum erat.

PROPOSITIO LXXVIII.

Segmentum Cylindrale in ratione datâ ad Hemisphærium constituere.

SIt iterum, sicut in præcedente, Hemisphærium ABC, in quo sit axis BD sectus in punctis E & F, ita vt, si ducta fuerint plana per eadem puncta ad basim AC parallela, dissecent segmentum intermedium in ratione datâ ad Hemisphærium sicut R ad S, & sicut pars axis intercepta EF, ad axem Hemisphærij BD. Transeant ergo per illa puncta duo plana ad basim AC parallela, & ab ijs sit factum segmentum intermedium HGLM: & constituantur duo Hemisphæria circa idem centrum D super eâdem basi AC, quæ tangant plana GL, & HM; in punctis E, & F, 67. huius.

quo-



quorum differentia, vel excessus maioris supra minorem, sit segmentum Campanale, quod per præcedentem demonstrauimus esse in ratione datâ ad Hemisphærium sicut R ad S.

Iterum per interfectiones planorum GL & HM cum superficie sphæricâ Hemisphærij ABC, concipiantur duo Cylindri constituti inter eadem plana parallela & basim AC, videlicet Cylindrum GT, & Cylindrum HV, quorum differentiam notatam literis PHGQ, TLMV, vocamus Segmentum Cylindrale, propterea quod latera eius sint superficies Cylindricæ. Dico Segmentum hoc Cylindrale esse ad Hemisphærium ABC sicut est EF ad BD, vel sicut ratio data R, ad S.

Quoniam enim excessus segmenti AGLC supra Cylindrum GT, hoc est Semiannulus Sphæricus designatus literis AGQ, TLC, æqualis est Hemisphærio IEN; Semiannulus vero Sphæricus notatus literis AHP, VMC æqualis est Hemisphærio KFO: Segmentum Cylindrale, vel excessus maioris semiannuli

sphæ-

ſphærici ſupra minorem, ſignatum literis P H G Q, T L M V; æqualis erit exceſſui Hemiſphærij I E N ſupra Hemiſphærium K F O, vel Segmento Campanali I E N, Q F K: Sed ſegmentum Campanale eſt ad Hemiſphærium ſicut pars axis intercepta E F ad totum axem B D; Ita igitur ſe habebit ſegmentum Cylindrale ad idem Hemiſphærium A B C, hoc eſt ſicut R, ad S, quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

Hinc palam fit quod ſi ſectus fuerit Conus ita vt eadem foret ratio partis axis interceptæ ad totum, quæ trunci Coni ad Conum, cuius pars ille eſt, ſegmentum Hemiſphærij interceptum inter eadem plana, Segmẽtum Lunulare, & Segmentum Campanale intercipientia eandem partem axis, nec non & Segmentum Cylindrale cuius Sphærica ſuperficies ſit eadem quæ ſegmenti intermedij, ſint omnia inter ſe æqualia. Si vero ſectus fuerit axis vtcunque duobus planis, neglectâ ratione quam habent partes ad totos axes, & non fuerit eadem ratio interceptæ partis ad totum axem, quæ trunci Coni ad totum Conum; nihilominus ſegmẽta Cylindralia & Campanalia ſemper inter ſe æqualia erunt, propter æqualitatem Hemiſphæriorum & ſemiannulorum eiuſdem altitudinis; Igitur & exceſſus eorum ſemper neceſſario æquales erunt. Reliqua autem ſegmenta, ſcilicet intermedium Hemiſphærij & ſegmentum Lunulare, nec ſibiipſis nec reliquis æqualia erunt.

COROLLARIVM GENERALE:

Continens ea quæ ex demonstratis colliguntur circa proportiones quinque Solidorum & portionum ipsorum, quæ ex reuolutione Sectionum Conicarum circa axes suos fiunt, & in eâdem altitudine existunt. Quæ omnia ad Hemisphærium eiusdem altitudinis, velut ad trutinam redacta ponderantur, vt inde rationes ipsorum ad inuicem facilius dignoscantur.

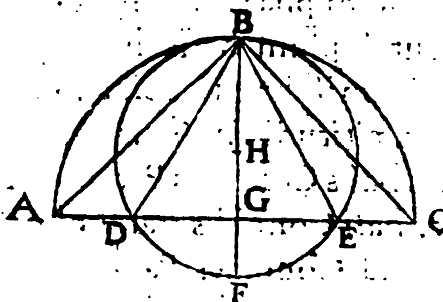
PRimo igitur, si Hemisphæriũ & Sphæra sint eiusdem altitudinis, Hemisphærium erit quadruplum Sphæræ: Sphæra enim cuius axis est duplus axis alterius Sphæræ est octupla ipsius; Hemisphærium igitur est quadruplum Sphæræ eiusdem altitudinis.

Hemisphærium est ad Portionem Sphæræ eiusdem altitudinis, sicut duplum axis eiusdem ad lineam compositam ex semidiametro Sphæræ, cuius Portio illa est vnà cum reliquo diametri Sphæræ deducto axe Portionis.

Sit enim Hemisphærium ABC & in eâdem altitudine & circa eundem axem constituatur Portio DBE dissecta a Sphærâ DBEF cuius diameter BF. Et quoniam Hemisphærium & Portio sunt ambo composita

ex Co-

ex Conis & Cassidibus, in hemisphęrio verò Conus & Cassis sunt æquales inter se (Conus enim est dimidium Hemisphærij.) Conus Portionis DBE est ad Conum Hemisphærij ABC, sicut quadratum DG ad quadratum AG, vel sicut linea FG ad lineam BG; Cassis verò Hemisphærij ABC (quæ æqualis est Cono eiusdem) est ad Cassidem portionis DBE, sicut superficies Sphærica ipsius, ad superficiem Sphæricam Portionis vel Cassidis eius DBE, hoc est sicut quadratum AB ad quadratum DB, vel sicut dupla BG ad FB, id est sicut ipsarum dimidia BG ad FH: Sed cùm ratio Coni portionis DBE ad Cassidem suam composita sit ex rationibus FG ad BG, & ipsius BG ad FH, erit Conus ad Cassidem in eâdem portione DBE, sicut FG ad FH; & vtraque simul ad Conum Hemisphærij ABC, sicut composita ex vtrisque FG & FH, ad lineam BG; & ad Hemisphærium sicut composita ex FG & FH, hoc est ex semidiametro sphæræ DBEF & reliquo diametri, dempto axe portionis BG, ad duplam BG; & conuertendo, sicut Hemisphærium ABC ad portionem DBE, ita dupla BG ad compositam ex HF & GF.



II.

Carol. 2. Prop. 68.

III. Hemisphærium ad Hemisphæroides eiusdem altitudinis se habet sicut Basis ad basim. Manifestum est quoniam Coni, qui sunt ipsorum dimidia, sunt in eâdem ratione.

IV. Hemisphærium est ad Conum eiusdem altitudinis, sicut duplum basis hemisphærij ad basim Coni.

V. Hemisphærium est ad Conoides Parabolicum eiusdem altitudinis, sicut Basis Hemisphærij ad duas tertias basis Conoidis Parabolici. Si enim fiat Conus super basi Conoidis Parabolici & in eadem altitudine, erit ad Conoides Parabolicum sicut tria ad quatuor, ideoque Hemisphærium erit ad illud, sicut duplum basis ad quatuor tertias ipsius basis Conoidis, vel sicut Basis Hemisphærij ad duas tertias basis Conoidis Parabolici.

VI. Hemisphærium est ad Conoides Hyperbolicum eiusdem altitudinis, sicut duplum basis Hemisphærij ad basim Conoidis Hyperbolici, vnà cum parte quæ sit ad eandem, sicut dimidium transuersæ diametri ad totam transuersam diametrum cum axe Conoidis tanquam vnam. Hoc colligitur ex propositione 27. Archimedis de Conoidibus & Sphæroidibus, vbi demonstratur, quòd Conoides Hyperbolicum sit ad Conum habentem eandem cum ipso basim & eundem axem, sicut linea composita ex axe portionis & tripla semidiametri sectionis, ad eundem axem & duplam eiusdem semidiametri tanquam vnam. Vnde diuidendo erit excessus Conoidis Hyperbolici supra Conum suum ad conum suum, sicut dimidium transuersæ diametri ad transuersam diametrum vnà cum axe Conoidis tanquam vnam. Ideoque Hemisphærium erit ad Conoi-

III des Hyperbolicum, sicut duplum basis suæ ad basim Conoidis Hyperbolici vnà cum parte quæ sit ad ipsam, sicut dimidium transuersæ diametri ad totam trans-

uersam diametrum vna cum axe Conoidis tanquam vnam: quod probandum erat.

Hæc sunt quę hactenus ad dissectionem Hemisphęrij excogitauimus; Multa autem desiderantur quorum resolutio a solidis dependet: Ratio autem cur hæc demonstrari possint ex principijs Euclidis, illa verò sine ope duarum mediarum proportionalium non possint, breuiter quantum possum demonstrabo, vbi prius ea quæ hucusque demonstrata sunt recensuero.

RECAPITVLATIO,

Continens ea quæ in præcedentibus demonstrantur, & obiter animaduertens aliqua principalia quæ desiderantur, & ex medijs planis, vel Principijs Euclideis nondum resolutionem acceperunt nec vnquam vti credo acceptura sunt, vnà cum illorum resolutione per media solida, & constructione cuiusdam lineæ Cubatricis, cuius ope facillimè exhibentur inter duas extremas duæ medię continuè proportionales, & multę aliæ propositiones solidæ non hactenus resolutæ.

EX Prop. 1. fit Cylindrus æqualis Hemisphærio, & eiusdem altitudinis: sequitur ex 32. lib. 1. Archimedis de Sphærâ & Cylindro.

Ex Prop. 6. 8. & 9. demonstratur, quod, si Hemisphærio constituatur Cylindrus in eâdem altitudine, æqualis, & secta fuerint ambo Plano, vel pluribus planis ad basim parallelis; partes Cylindri interceptæ inter quælibet plana parallela semper æquales erunt quibuslibet sectoribus, siue sint primi siue secundi eiusdem Hemisphærij, & quorum superficies Sphæricæ inter eadem plana parallela interceptę sunt. Vnde consequitur quòd Hemisphærio constitui possit in ratione datâ minori, Sector vel primus, vel secundus, vel intermedius.

Ex 7. & 10. probatur quod Conus Segmenti vnà cum Cono rectangulo eiusdem altitudinis simul sumpti æquales sint dimidio sectoris secundi.

Ex 11. docemur constituere duos Conos, quorum alter sit rectangulus, in eâdem altitudine & in quâcunque ratione datâ ad inuicem. Et ex 13. docemur inscribere Hemisphærio duos Conos in ratione datâ: Sed Cono dato facere Conum rectangulum æqualem est opus duarum mediarum, sicuti infra monstrabitur.

Ex 12. demonstratur quis sit maximus Conus in Hemisphærio inscriptibilis.

Ex 14. & Corollario eiusdem docemur constituere Conum super basi cuiuscunque portionis æqualem Portioni datæ: Sed Cono dato Inuenire Portionem æqualem & super eâdem basi est opus solidum sicut infra apparebit.

Ex 18. docemur inuenire Sectorem qui ad Conum suum habeat rationem datam: & ex 19. Inuenire Sectorem in ratione datâ ad Portionem suam.

Per 20. demonstratur ratio partium Segmenti inter se, videlicet Sectoris secundi & Coni segmenti. Et in 21. docemur constituere dictas partes in ratione datâ possibili.

Per 22. demonstratur ratio quam habet segmentum intermedium ad partem Cylindri æqualis hemisphærio inter eadem plana interceptam.

In 23 demonstratur æqualitas Segmenti ad tres Conos eiusdem altitudinis. Et per 24. constituitur Segmentum in ratione datâ ad Conum rectangulum eiusdem altitudinis.

In 25. agitur de segmento Intermedio, & constituitur in ratione datâ ad sectorem secundum eiusdem superficiei Sphæricæ. Et in 26. & 27. secatur Hemisphærium duobus planis intercipientibus Segmentum Intermedium, quod habeat rationem datam ad Hemisphærium. Vnde etiam in 28. demonstratur quòd datâ ratione partium axis reliquarum, quæ vltra axem Segmenti ad polum & centrum Hemisphærij existunt; inuenietur Segmentum Intermedium æquale Sectori secundo eiusdem superficiei Sphæricæ.

Ex 29. fit Portio in ratione datâ ad partem Cylindri æqualis Hemisphærio, eiusdem cum portione altitudinis.

Ex 30. Inquiritur ratio Portionis ad Conum suum: vnde etiam colligitur, & demonstratur ratio Portionis ad Hemisphærium.

In 31. quemadmodum in 7. demonſtratum erat quòd exceſſus Cylindri conſtituti ſuper baſi Hemiſphærij, & in eâdem altitudine, ſupra Conum rectangulum in eodem Cylindro inſcriptum, erat æqualis Hemiſphærio, ita nunc demonſtratur, quod exceſſus eiuſdem Cylindri ſupra Hemiſphærium, æqualis ſit Cono rectangulo in eodem inſcripto, & quòd ſingulæ partes eiuſdem exceſſus prædicti æquales ſint ſingulis partibus Coni rectanguli, prout inter eadem plana parallela correſpondent. Vnde alia methodo.

In 32. Demonſtratur ratio Portionis ad Hemiſphærium.

In 33. demonſtratur æqualitas inter quoſdam partes ſeu Portiones Hemiſphærij & aliquas ipſius Cylindri conſtituti ſuper baſi, & iuſdem altitudinis cum Hemiſphærio.

Per 34. & 35. docemur conſtituere Truncos Conorum æquales Portionibus Sphærarum ſuper ijſdē baſibus portionum & in ijſdē altitudinibus. Et in 36. docemur inſcribere Cylindro Truncū Coni in ratione datâ.

In 37. demonſtratur quòd exceſſus Trunci Coni ſuprà Cylindrum in eodem trunco inſcriptū ſit æqualis Conoidi Hyperbolico eiuſdem altitudinis, & quòd per ſingulas partes &c.

Similiter in 38. demonſtratur quòd exceſſus Cylindri ſupra Conum inſcriptum æqualis ſit Hemiſphæroidi eiuſdem altitudinis & quòd ſingulæ partes &c.

In 39. demonſtratur quòd ſi in Trunco Coni inſcriptus fuerit Cylindrus, & iterum in Cylindro Truncus Coni, ita vt ſi ſecti fuerint omnes ſimul plano per

axem

axem, & latera opposita Trapeziarum in truncis factarum sint parallela; quod ambo excessus simul sumpti (videlicet maioris Trunci supra Cylindrum & Cylindri supra minorem truncum) æquales sint Conoidi Parabolico: & quòd singulæ partes &c. Vnde manifestum est quòd Conoides Hyperbolicum, & Hemisphæroides, simul constitui possint in eâdem altitudine, vt sit Conoides Hyperbolicum duplum Hemisphæroidis, & ambo simul sumpta æqualia Conoidi Parabolico eiusdem altitudinis; & sic etiam de ipsorum Truncis vtcunque dissectis, planis vel ad basim parallelis vel non, facillime demonstrari potest, quod sint semper ad inuicem in iisdem rationibus sicut toti.

In 40. demonstratur quòd excessus Trunci Coni supra Conum eiusdem altitudinis, quorum latera sunt parallela, æqualis sit Frusto Conoidis Parabolici.

In 41. demonstratur quòd omnis Portio Sphæræ excedat Conum suum quantitate Sphæroidis lati, cuius diameter maior æqualis sit lateri Coni in portione inscripti; diameter vero minor æqualis sit axi eiusdem Coni vel Portionis.

A 42. Incipit de Maximis Inscriptis & Minimis circumscribentibus disquisitio, hoc est de Conis & Conoidibus, Sphæris, & Sphæroidibus vel eorum Portionibus, & vniuscuiusque horum inuicem Inscriptione, & circumscriptione: & præmisso Lemmate demonstratur primò, quòd Maximum Solidum quod fieri potest ex segmentis cuiusuis rectæ, est quando segmentum maius est duplum reliqui, & tunc quòd maximum Solidum est illud, quod factum est ex quadra-

to maioris Segmenti in minus. Et continuatur hæc disquisitio vsque ad 57. propositionem.

In 58. demonstratur ratio quam habet basis portionis ad basim Cylindri ei æqualis, & eiusdem altitudinis. Et in 60. quòd omnis Portio sit æqualis tribus Conis ex eâdem basi, & dimidiâ altitudine eiusdem, vnà cum sphærâ cuius diameter sit æqualis altitudini ipsius portionis.

Per 59. demonstratur quòd si duæ Sphæræ inæquales se mutuò intus tangant, quarum diametri fuerint in ratione sesquialterâ, & si ambo sectæ fuerint plano ad diametrum communem recto, tunc Conus in maioris Sphæræ Portione inscriptus, æqualis erit Portioni minoris Sphæræ quæ circa eũdem axem constituitur.

In 61. 62. & 63. agitur de Sphærarum inæqualium Segmentis in eâdem altitudine existentibus; & in priori demonstratur quòd excessus ipsorum supra Cylindros in ipsis inscriptos, sint inter se æquales. In 62. quòd excessus ille sit æqualis hemisphærio eiusdem altitudinis. In 63. verò demonstratur, quomodo constituendus sit Cylindrus æqualis cuicunque Segmento dato, & eiusdem altitudinis. vnde sequuntur Corollaria multa.

Per 64. demonstratur quomodo segmento Hemisphærij dato constitui possit aliud segmentum alterius Hemisphærij æquale in altitudine datâ possibili.

In 65. demonstratur quòd superficies Sphæricæ Portionum diuersarum Sphærarum sint ad inuicem sicut axes vel radij Sphærarum quarum sunt partes. Et in 66. demonstratur quòd Sectores diuersarum sphæra-

rum sint in duplâ ratione radiorum Sphærarum quarum sunt partes.

In 67. demonstratur ratio, quam habet Cassis ad Hemisphærium, vel ad Sphæram cuius pars illa est.

In 68. & 69. Demonstratur ratio quam habent Cassides ad inuicem, siue sint eiusdem siue diuersarum Sphærarum partes.

In 70. Conorum eiusdem altitudinis ratio ad inuicem esse sicut reliquæ diametrorum sphærarum in quibus sunt inscriptibiles demonstratur: Et in 71. ratio Coni ad Sphæram esse composita ex duplâ basi ad superficiem Sphæræ, & ex altitudine ipsius ad diametrum Spheræ.

Per 72. Constituitur Portio in ratione datâ ad Hemisphærium eiusdem altitudinis.

Per 73. Sphæræ datæ constituitur Portio æqualis in quâcunque minore altitudine.

In 74. agitur de Rhombis in Sphærâ inscriptibilibus & rationibus ipsorum ad inuicem.

In 75. demonstratur quomodo ex dato quocunque Trunco Coni, inueniatur Conus cuius pars ille truncus erit, & ad quem habebit eandem rationem quam habet ipsius trunci axis, ad axem totius Coni.

In 76. 77. & 78. Proferuntur tres modi secandi Hemisphærium in ratione datâ, segmentis intermedijs: ex quibus duo fiunt superficiebus sphęricis, reliquum vero superficiebus Cylindricis.

Sed videamus iam quęnam sint istę Propositiones desideratę de quibus loquutus sum in principio huius recapitulationis, quę per media plana vel Elementa

Ee Eu-

Euclidis non sint demonstranda, & rationem inquiramus quare tales sint.

Primò autem suppono quòd nulli Geometrę ignotum sit, quod solida sint in triplâ ratione laterum vel linearum homologarum, quod ab Euclide libro 11. prop. 33. demonstratum est: tripla vero ratio supponit trisectionem rationis, vel duo media continuè proportionalia. Exempli gratiâ, sumamus illud quod supra ad prop. 11. adnotauimus, & sit aliquis Conus cuius altitudo sit A, basis vero radius B, & supponatur quod ei sit æqualis Conus rectangulus C: & quoniam Conus C est rectangulus, altitudo eius erit æqualis radio basis ipsius; vterque igitur ipsorum vocętur D: Cum igitur Coni sint inuicem æquales, reciprocabuntur ipsorum altitudines & bases, ideoque erit sicut altitudo A ad altitudinem D, ita quadratum eiusdem D radij basis Coni C, ad quadratum B radij basis Coni dati; Quare erit sicut A ad D, ita quadratum D ad quadratum B; propterea dupla erit ratio A ad D eius quam habet D ad B. Igitur si A ponatur prima, & B quarta, D erit tertia in serie quatuor continuè proportionalium. Ergo Cono dato non potest constitui Conus rectangulus æqualis, sine ope duarum mediarum continuè proportionalium, sicut antea diximus.

Quod autem in aliquo casu particulari hoc fieri possit non est dubium: Nam si lineæ propositæ inter quas quęruntur duę medię continuè proportionales fuerint in ratione duplâ tunc ex demonstratis a Vieta in libro Variorum de rebus Mathematicis responsorum, sub titulo Capitis 5. inuenies propositi satisfactionem. Si

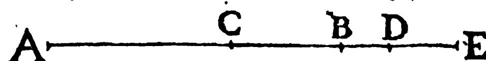
vero

vero ratio fuerit talis (quemadmodum si linea A B secta fuerit extremâ & mediâ ratione in C, & producta in D, donec fiat sicut A C ad A B, ita quadratum AB ad quadratum A D) quam habet linea A D ad lineam



A C, inueniendæ sunt duæ mediæ inter A D & A C hoc modo: Producatur iterum linea AD in E, vt sit quadratum ex AE duplum quadrati ex A B, & concipiatur hemisphærium cuius axis A E diuisus in punctis C, & B, & per illa transeant plana parallela basi, secantia Hemisphærium, & super illis concipiantur duo Coni constituti habentes ipsorum vertices in centro basis Hemisphærij, scilicet in puncto A. Dico istos Conos inscriptos hemisphærio, quorum axes sunt lineæ A C & A B, fore inter se æquales; Conum vero cuius axis AC, habere pro radio basis suę lineam æqualem lineæ A D, & Conum cuius axis A B fore rectangulum. Cum enim quadratum A E per constructionem factum sit duplum quadrati A B; manifestum est quòd Conus cuius axis A B inscriptus Hemisphærio ex radio A E, sit Conus rectangulus. Iterum cum factum sit sicut A C ad A B, ita quadratum ex A B ad quadratum ex A D, manifestum etiam est quod Conus cuius radius basis sit AD & altitudo A C, sit æqualis Cono rectangulo ex altitudine A B, & eodem radio basis A B. Quod autem Conus cuius altitudo A C inscriptus Hemisphærio ex radio A E, habeat pro radio basis lineam æqualem lineæ A D sic probatur. Quo-

niam ſicut A C linea ad lineam A B, ita per conſtructionem factum eſt quadratum A B ad quadratum A D erit diuidendo & inuertendo ſicut quadratum A B ad



exceſſum quadrati A D ſupra quadratum A B, ita A C ad C B. Rurſus quoniam ſicut quadratum A B ad quadratum A C, vel ad rectangulum A B C, ita A B ad B C, per conuerſionem rationis erit ſicut quadratum A B ad exceſſum ſuum ſupra quadratum A C, ita A B ad A C; ſed ſicut A B ad A C, ita A C ad C B; Igitur cum quadratum A B habeat eandem rationem ad vtrumque exceſſum ſcilicet quadrati A D ſupra quadratum A B, & ipſius quadrati A B, ſupra quadratum A C, oportet vt iſti exceſſus ſint æquales, ideoque erit aggregatum quadratorum A D & A C ſimul, æquale duplo quadrato A B hoc eſt quadrato A E radij Hemiſphærij. Quare cum quadratum radij Hemiſphærij ſit æquale duobus quadratis A C & A D, erit A D radius baſis Coni cuius altitudo eſt recta A C, in hemiſphærio ex radio A E inſcripti.

Hinc etiam infinitæ aliæ rationes ab iſtis generantur, inter quas geometricè exhibentur inter duas lineas datas, duæ mediæ continuè proportionales. Si enim ratio data, exempli gratiâ A ad D (inter quas fuerint continue proportionales B & C) continuetur, & fiat ſicut A ad D, ita D ad E, dico quod inter A & E cadet etiam C vna ex medijs proportionalibus; hac tamen differentiâ, quod ſi inter A & D erat ma-

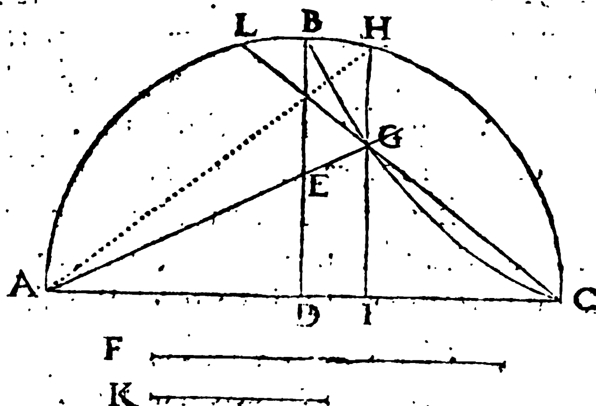
ior media, inter A & E erit minor media; vnde dabitur altera media, quæ sit G: Iterum si ratio A ad D triplicata fuerit & fuerint extremæ datæ A & F, dico G fore vnam ex medijs inter A & F, & si inter extremas in duplicatâ ratione erat maior media, inter extremas in triplicatâ ratione erit minor media; & sic è contrariò. Similiter si ratio prima A ad D data, fuerit diuisa, quæ maior erat media inter primas, erit minor inter secundas, & è contrario, & si pluries diuisa fuerit ratio, semper eandem legem tenebunt mediæ.

Licet autem aliqui exhibeantur casus particulares in quibus inueniuntur geometricè duo media, Problema tamen vniuersaliter est Solidum, & dependet ex medijs non demonstrabilibus per principia Euclidis; veluti ex applicatione lineæ rectæ inter duas rectas positione datas, & angulum continentes, quę ad punctum datum pertingat. Huius autem Problematis solutioni abunde satisfactum est a Pappo Alexandrino in libro 4. prop. 23. Mathematicarum collectionum, per lineam Concoidem a Nicomede inuêtam & prop. 31. eiusdem libri per sectionem Hyperbolicam.

Dauid etiam Riuàltus in Commentarijs in Archimedem de Sphærâ & Cylindro ex Eutocio profert modum Spori inueniendi duas medias per lineam in semicirculo ductam ab vno ipsius angulo, hac lege, vt pars intercepta inter peripheriam & lineam a reliquo angulo semicirculi ductam, bifariam a perpendiculari ductâ a centro diuidatur. Modum etiam Menechmi duabus Sectionibus Parabolicis, & Modum ipsius Eutochij ex compositione Parabolę cum Hyperbola, deni-

nique modum pulcherrimum Dioclis per lineam Cissoidem; Circa quæ quoniam ab ipso tradita sunt non amplius moror, immo lectorem ad ipsius commentaria satis cognita remitto.

Figuram verò lineæ Cassoidis & vsum eius pro inueniendis duabus medijs continuè proportionalibus, vtpote vsui maximè accommodam, nec ab ipso Riualto (quoad vsum) bene demonstratam, hic annectere, operæ pretium duxi,



Sit igitur Semicirculus A B C, cuius Centrum D, a quo erigatur perpendicularis D B, & sint datæ F, & K, rectæ inter quas inueniendæ sint duæ mediæ continuè proportionales: Primò autem ducta sit a puncto B âd angulum C linea Cissoides B G C (quomodo autem formetur linea hæc postea docebitur) & fiat sicut F maior extrema ad K minorem, ita A D ad D E, connexâque A E, & productâ donec coincidat cum Cissoide in puncto G, per illud transeat recta H G I parallela B E D; Dico H I & I C esse medias continuè

pro-

proportionales inter A I & I G, quæ sunt in eâdem ratione quâ F ad K.

Quomodo autem formetur linea Cissoides sic accipe, & postea sequetur demonstratio.

Concipiatur a puncto B periphæriæ A B C, moueri recta linea versus A, cuius vnus terminus maneat fixus in puncto C, alter vero feratur per omnia puncta arcus B A motu æquabili: Similiter in eodem tempore eodemque motu æquabili per omnia puncta arcus B C, feratur linea recta parallela B D, & per quadrantem B D C vbicunque se intersecuerint istæ duæ lineæ, ducta sit per intersectiones linea quædam curua, & hæc erit linea quæ vocatur Cissoides.

Quoniam igitur lineæ L C & H I, sese intersecantes in puncto G lineæ Cissoidis B G C, feruntur in eodem tempore a puncto B, erunt arcus BH & BL æquales, ideoque arcus A L æqualis erit arcui H C, & angulus L C A æqualis angulo H A C, & triangulum G C I simile triangulo H A I; quare sicut A I ad I H, ita C I ad I G; Sed sicut A I ad I H, ita est I H ad I C; Ideoque A I, I H, I C & I G, sunt quatuor lineæ continuè proportionales: Inuenta igitur est ratio quam habent istæ quatuor lineę proportionales ad inuicem quarum extremæ A I & I G, sunt in eâdem ratione quâ sunt F & K; ideoque duæ mediæ inter F & K datæ sunt.

Neque omittendum est quòd non solùm in prædicto casu opus est duabus medijs, verùm etiam in omni casu quando constituendus fuerit aliquis Conus vel rectangulus, vel similis cuicunque alteri Cono, æqualis,

lis; vel in ratione datâ ad Conum datum; In praecedente verò casu duae mediae continuè proportionales immediate efficiunt problema, in alijs vero Casibus, (quemadmodum, si praeciperetur Cono dato A, facere Conum B aequalem, & similem cuidam cono C, oportet primò inuenire rationem quam habet Conus datus A ad Conum C, & tunc in eâdem ratione reciprocâ fiat conus C ad conum similem sibi B) medium locum tenet Conus ille cui similis constituendus est Conus, & oportebit inter terminos rationis Coni A, ad Conum C, inuenire duos medios continuè proportionales, vt habeatur Conus B in eâdem ratione ad Conum C, quam habet Conus A ad eundem. Si verò propositum fuerit cõstituere Conum B ad Conum A in ratione E ad F, & similem Cono C; tunc fiat sicut Conus A ad Conum C, ita F ad D, & sicut D ad E, ita Conus C ad alium sui similem hoc est cono quaesito B; vnde ratio Coni A ad conum B componitur ex ratione ipsius coni A ad conum C, & eiusdem C ad conum B; vel ex ratione F ad D, & D ad E; sed vt inueniatur Conus B similis Cono C, hoc est duo Coni similes; in ratione D ad E, oportet vt inueniatur inter ipsas D & E, duae mediae continuè proportionales; Ideoque sine ope duarum mediarum continuè proportionalium Problema non soluetur.

Ratio quare sine ope duarũ mediarum fieri non possunt.

Quicquid hic de Conis iam dictũ est, idem de alijs solidis parallelepipedis intelligendum: & mihi satisfacere videtur quod ratio, quare non possint solui istiusmodi Problemata, dependeat a similitudine vel formâ

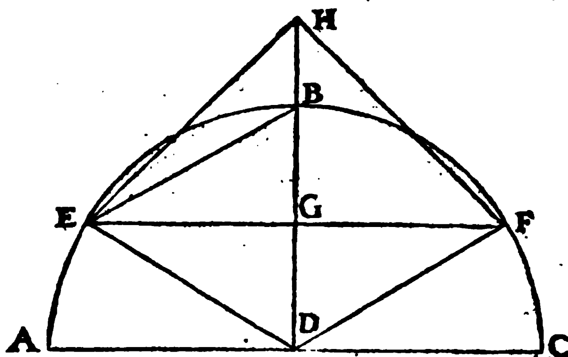
for-

corporis vel solidi faciendi, quod pluribus exemplis infra confirmabitur.

Ex propositione 14. & eiusdem Corollario constituitur Conus æqualis Portioni datæ, super eâdem basi cum Portione: Sed Cono dato non possumus constituere Portionem Sphæræ æqulaem super eâdem basi cum Cono consistentem. Hinc quæritur ratio quare hoc fieri non possit. Inquiramus igitur quibus Solidis sit Portio æqualis, & inueniemus per propositionem 60. quòd omnis Portio Sphæræ sit æqualis tribus Conis ex eâdem basi & dimidiâ altitudine eiusdem, vnà cum Sphærâ, cuius diameter est æqualis altitudini ipsius Portionis, hoc est Cono super eâdem basi portionis constituto, vnà cum dimidio eiusdem, & dimidio Coni Rectanguli eiusdem altitudinis: Duplicatis igitur omnibus, duplum Portionis, (vel duplum Coni cui æqualis constituenda est Portio) æquale est tribus Conis ex eâdem basi & altitudine cum portione, vnà cum Cono rectangulo eiusdem altitudinis: Tribus autem his Conis æqualis est vnus Conus habens basim triplam & eandem altitudinem, & duplo Cono dato æqualis est Conus qui habet basim triplam, altitudinem verò subsesquialteram. Videamus autem figuram Prop. 14. vt manifestior fiat demonstratio.

Portionis resolutio.

Quoniam inquam duplum Coni E H F, hoc est Conus ex triplâ basi E F & altitudine subsesquialterâ altitudinis G H, æqualis est tribus Conis ex eâdem basi E F & altitudine G B, hoc est, Cono ex triplâ basi E F & altitudine B G, vnà cum Cono rectangulo ex eâdem altitudine B G: Coni autem sunt ad inuicem

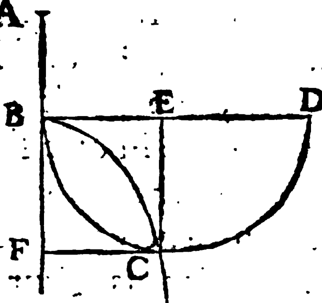


ſicut Parallelepipeda ex eiſdem baſibus & altitudinibus: Igitur Solidum ex triplo quadrato E G in duas tertias lineæ G H, æquale eſt ſolido ex triplo quadrato eiuſdem E G in G B, vnà cum Cubo ex G B, quare Cubus ex G B æqualis eſt ſolido ex quadrato E G in exceſſum lineæ ſubſeſquialteræ G H, ſupra lineam G B; & ideo exceſſus ille eſt quarta proportionalis, quarum radix tripli quadrati E G eſt prima, G B verò ſecunda. Data autem eſt radix tripli quadrati E G ſcilicet prima; data etiam eſt linea ſubſeſquialtera lineæ G H, quæ eſt aggregatum ſecundæ & quartæ in ſerie quatuor continuè proportionalium; quæritur ſecunda, ſcilicet linea G B vt efficiatur Problema. Solidum autem eſt hoc Problema, vt ex datâ vnâ extremarum & aggregato ſecundæ & quartæ in ſerie quatuor continuè proportionalium diſcernantur ſingulæ, nec per principia geometrica ſoluendum. Per Parabolicam vero Sectionem ſoluetur hoc modo.

Sint datæ A B vna extremarum & B D aggregatum ſecundæ & quartæ, quæ applicentur ſimul ad angulos rectos. Producatur iam A B quantum opus in F, &

factâ

factâ BF diametro Parabolæ & AB recto latere, describatur linea parabolica BC: tum fiat BD diameter circuli, circa quam sit semicirculus BCD, interſecans Parabolam in puncto C, a quo ordinatim applicentur lineæ CF ad diametrum parabolæ, & CE ad diametrum Circuli, ſecans BD datam in puncto E: Dico BE eſſe ſecundam quæſitam, ED vero quartam in ſerie quatuor continuè proportionalium.



Cùm enim BE ſit æqualis FC, rectangulum ABF æquale eſt quadrato BE: Iterum cùm EC æqualis ſit BF, rectangulum BED æquale erit quadrato BF: Igitur AB, BE, BF, ED, ſunt quatuor lineæ continuè proportionales, quarum AB prima & BD aggregatum ſecundæ & quartæ ſunt datæ, linea vero BE altitudo Portionis quæſita, inuenta eſt.

Hinc etiam patet, quòd non ſolùm cum propoſitum eſt conſtruere aliquod Solidum, quod habeat ſimilitudinem vel formam alterius ſolidi dati, æquale, vel in ratione datâ ad aliud ſolidum, opus eſt duabus medijs continuè proportionalibus, verùm etiam in omni caſu, quando pars aliqua Solidi quæſiti, inuenta per reſolutionem eiuſdem Solidi, habet ſimilitudinem vel formam alicuius Solidi noti, non poſſit ſine ope alicuius loci ſolidi, vel Sectionis Conicæ geometricè ſolui; ſicut ex præmiſſis liquido appatet.

Iam opportunum videtur, vt ex datâ hac occaſione

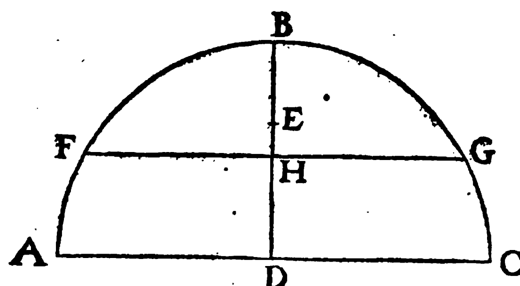
inquiramus de Segmentis, & inde exploremus in quæ Solida resoluantur, & quomodò ad Hemisphæria quorum sunt partes in ratione datâ cōstituenda sint. Quoniam autem Hemisphærium sectum plano ad basim parallelo componitur ex portione & segmento, videamus primò in quæ solida resoluatur Segmentum, & postea quomodo in ratione datâ ad Hemisphærium illud constituere possimus.

Inueniemus igitur primò quòd Segmentum æquale sit tribus Conis ex minore ipsius basi & eâdem altitudine, vnà cum excessu quodam, qui per Corollarium quintum Prop. 63. demonstratur æqualis Hemisphærio eiusdem cum segmento altitudinis. Et per prop. 23. Segmentum ad basim demonstratur esse æquale tribus Conis eiusdem cum segmento altitudinis, quorum duo ex basi Hemisphærij, reliquus ex basi minori Segmenti. Quare si vtrobique deductus fuerit Conus ex minori basi, remanebunt duo Coni ex basi Hemisphærij æquales duobus Conis ex basi minori, vnà cum Hemisphærio eiusdem altitudinis; Hemisphærium autem æquale est duobus Conis rectangulis eiusdem altitudinis; Ideoque Conus ex basi Hemisphærij & altitudine segmenti, æqualis est Cono ex minori basi vnà cum Cono rectangulo eiusdem altitudinis cum segmento.

Sit igitur propositum secare Hemisphærium plano ad basim parallelo, ita vt Segmentum habeat rationem datam ad Hemisphærium; Supponatur factum & quòd in Hemisphærio ABC secto plano FG ad basim AC parallelo, Segmentum AFGC habeat ad

He-

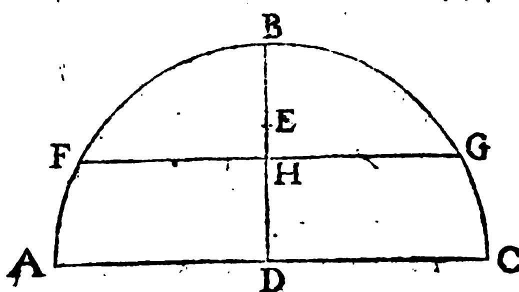
Hemisphærium ABC, rationem quam habet pars axis ED ad totum axem BD.



Cum autem duo Coni ex basi Hemisphærij AC & altitudine ED, sint ad Hemisphærium ABC sicut linea ED ad lineam BD; segmentum vero AFGC supponatur se habere ad idem Hemisphærium in eâdem ratione ED ad BD: Igitur duo Coni ex basi AC & altitudine ED æquales sunt segmento AFGC. Eidem vero Segmento æquales sunt duo Coni ex eâdem basi AC & altitudine DH vnà cum Cono segmenti ex base FG & eâdem altitudine DH, Conus autem Segmenti scilicet ex basi FG & altitudine DH, minor est Cono ex base AC & altitudine DH, quantitate Coni rectanguli ex DH; Coni autem eum sint ad inuicem sicut solida parallelepipeda, erit segmentum AFGC ad Hemisphærium ABC, sicut solidum ex triplo quadrato AD in DH minus Cubo DH ad solidum ex duplo quadrato AD in DB, vel duplum Cubi AD; Ideoque æquale est solido ex duplo quadrato AD in DE.

Cum igitur solidum ex triplo quadrato AD in DH

minùs



minus cubo D H; æquale ſit ſolido ex duplo eiuſdem quadrati A D in D E, erit reciprocando baſes & altitudines, ſolidum ex triplo quadrato A D in duas tertias quadrati E D, æquale ſolido ex eodem triplo quadrato & altitudine H D, deficiente cubo ex H D; Quare maior erit H D quam linea ſubſeſquialtera ipſius E D, & differentia inter H D & duas tertias E D erit quarta in ſerie quatuor continuè proportionalium, quarum latus tripli quadrati A D eſt prima, H D vero ſecunda; Et ideo cum linea ſubſeſquialtera E D datæ ſit aggregatum ſecundæ & quartæ quatuor continuè proportionalium, quarum latus tripli quadrati A D ſit prima, per lineam Parabolicam ſicut in proxima antecedente de Cono & portione demonſtrauimus, diſcernentur ſingulæ, & inuenietur linea H D, ſcilicet altitudo ſegmenti A F G C, quod habet ad Hemiſphærium A B C rationem E D ad B D.

Hinc iterum manifeſtum eſt quòd ſegmentum ad baſim, in cuius reſolutione inuenitur pars aliqua ſimilitudine vel formâ nota, vtpote Hemiſphærium

vel Conus Rectangulus, non possit constitui in ratione datâ ad Hemisphærium sine ope duarum mediarum continuè proportionalium vel sectione Conicâ: Ad resolutionem enim Problematum solidorum opus est medijs solidis vt resoluantur.

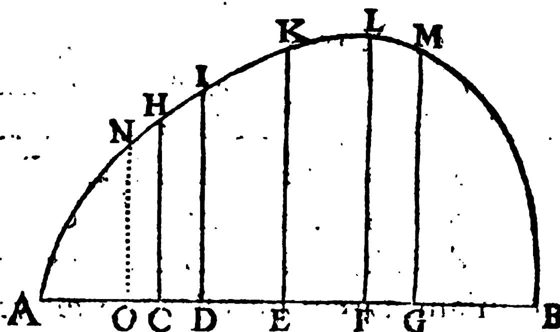
Quoniam autem Hemisphærium componitur ex Segmento & Portione, consequens videtur vt iam inquiramus per quæ media possimus constituere Portionem in ratione datâ ad Hemisphærium. Satis autem iam dixisse videmur de resolutione ipsius, quando demonstrauerimus quod aliqua pars ipsius erat æqualis Sphæræ eiusdem cum Portione altitudinis. Ratio portionis ad Hemisf.

In propositione verò 32. demonstratum est quòd Portio se habeat ad Hemisphærium sicut excessus, quo triplus axis eius superat tres deinceps proportionales, in ratione axis Hemisphærij ad axem Segmenti, ad duplum axem Hemisphærij: Et in 30. sicut rectangulum quoddam ex altitudine Coni æqualis Portioni in altitudinem portionis, ad rectangulum ex compositâ ex axe Coni prædicti & axe segmenti, in axem Hemisphærij. Quoniam autem necessarium est vt vtraque in eandem rationem conueniat, licet per diuersas methodos progrediantur, melius duxi vt per methodum Prop. 32. Problematis resolutionem inquiram.

Sed primò licebit hic declarare qualis sit huius propositionis resolutio, & in quam effectionem geometricam cadat, vt lineam quandam Cubatricem, huic negotio propriam, & ad multas alias propositiones solidas soluendas accommodatam, designem. Postea verò aliquas propositiones adiungam, quæ non solùm

huic negotio, verum etiam ad multas in Algebrâ propositiones soluendas attexui.

Qui igitur per Algebram experiri velit, quænam sit resolutio prop. 32. inueniet, quòd ad datam lineam (scilicet quæ tripla sit radij basis Hemisphærij) applicandum sit quadratum faciens solidum æquale Cubo dato deficiens Cubo. Ideoque linea data erit aggregatum extremarum ex quatuor lineis in serie continuè proportionalibus, mediarum vero minor est latus cubi dati. Ex dato igitur extremarum aggregato, & vnâ mediarum, quærantur singulæ proportionalium. Veruntamen oportebit vti medijs solidis ad hæc demonstranda, aliter enim demonstrari non poterunt.

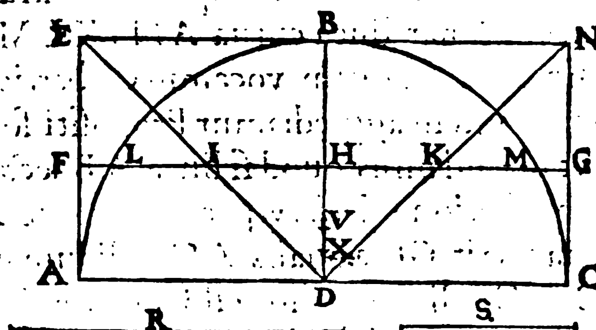


Exponatur itaque linea Cubatrix & fabrica ipsius, vt per illam inueniamus solutionem huius problematis. Sit itaque linea recta A B, in quâ sumantur quotuis puncta C, D, E, F, G, & super singulis eorum erigantur perpendiculares C H, D I, E K, F L, G M: Fiat autem Cubus ex lineâ C H æqualis solido ex quadrato A C in lineam C B: Similiter cubus ex linea D I æqualis sit solido ex quadrato A D in D B, & sic

in cœteris omnibus; vnde si æquabili manus ductu connectantur, & fiat linea curua AHIKLMB, erit linea illa sic facta, ea quam vocamus Cubatricem.

Priusquam autem aggrediamur Propositi solutionẽ opus est vt ostendamus quod si linea AB secta fuerit in quacunque ratione datâ, vtpote in ratione AC ad CB, & facta fuerit GB æqualis AC, solidum ex quadrato AC in CB lineam, hoc est Cubus ex CH, erit ad Cubum ex MG, vel solidum ex quadrato AG in GB, sicut linea AC ad lineam CB. Cum enim solida habeant ad inuicem rationem compositam ex basibus & altitudinibus, erunt ista solida ad inuicem cõposita ex duplâ ratione AC ad CB (nam CB & AG sunt æquales) & simplâ ratione CB ad AC; ideoque deductâ simplâ ratione CB ad AC ex duplâ AC ad CB, quæ remanet erit AC ad CB. Et propterea Cubus ex HC ad Cubum ex MG, erit sicut linea AC ad lineam CB.

Iam vero vt demonstremus sectionem Hemisphærij in ratione datâ secundum methodum Prop. 32. repetamus Figuram ipsius. Et propositum sit: Secare Hemisphærium ABC plano ad basim parallelo, ita vt Portio dissecta LBM sit ad Hemisphærium ABC sicut linea S ad duplum BD, vel lineam AC: Et quoniam demonstratum est quòd Portio se habeat ad Hemisphærium, sicut excessus triplæ BH supra tres proportionales, scilicet lineam BX, ad duplum axis Hemisphærij; Oportet quod linea S sit æqualis excessui quo tripla BH superat tres illas proportionales, vel lineam BX. Iterum, cum per Analyticam æquatio-



nem inueniatur (hoc autem infra Geometricè demonſtrabimus) quòd Solidum ex quadrato A D in lineam S, æquale ſit ſolido ex triplâ lineâ A D vel B D in quadratum B H, minus cubo ex B H, Neceſſarium erit vt ſolidum illud ex triplâ B D in quadratum B H, minus Cubo ex B H, ſit ad ſolidum ex quadrato B D in duplum B D, ſicut S linea ad duplam B D, vel ſicut Portio ad Hemiſphærium. Fiat igitur linea R ſecunda in ſerie quatuor continuè proportionalium, quarum B D prima, A C vero quarta; & erit Cubus ex R, æqualis ſolido ex quadrato B D in duplam B D vel A C; Ideoque Solidum ex quadrato B D in S, vel ei æquale, ſcilicet ſolidum ex triplâ B D in quadratum B H minus cubo B H, erit ad Cubum ex R, ſicut linea S ad duplam B D.

Supponatur iam linea A B quæ baſis eſt lineæ Cubatricis ita diuidi in puncto C, vt ſit A C ad C B ratio data, hoc eſt ſicut S ad duplam B D, & fieri etiam G B æqualis A C, & a punctis C, & G, erectæ perpendiculares C H & G M ad peripheriam ipſius lineæ

Cu-



Cubatricis; Manifestum est iam ex supra demonstratis quod Cubus CH ad cubum ex GM habeat eamdem rationem AC ad CB.

Duo Cubi in ratione data ad inuicem.

Rursus in base lineæ Cubatricis fiat AD æqualis FB, & erigatur perpendicularis DI, ex quâ Cubus erit æqualis solido ex quadrato AD in DB, cuius altitudo est dupla lateris basis ipsius, ideoque simili solido ex quadrato axis Hemisphærij in duplam altitudinem eiusdem; tum tota linea AB tripla partis AD.

Iam concipiatur linea AB diuidi a puncto C, ita vt sit AC ad CB ratio in quâ propositum est secare Hemisphærium, & fieri sicut MG ad HC, ita ID ad NO; quæ ordinatim applicetur lineæ AB inter A & D. Dico si fiat in axe hemisphærij BD ad BH, sicut in Cubatrice AD ad AO, quod planum secans Hemisphærium per punctum H ad basim parallelum, dissecabit Portionem LBM in ratione datâ ad hemisphærium, sicut linea S ad duplum axis eiusdem.

Quoniam enim factum est sicut MG ad HC, ita ID ad NO, erit permutando, Cubus ex NO ad Cubum ex ID, sicut Cubus ex HC ad Cubum ex MG,

hoc est sicut AC ad CB, ratio data: Sed Cubus ex NO est æqualis solido ex quadrato AO in OB; solidum autem ex quadrato AO in OB minus est solido ex quadrato AO in AB quantitate Cubi ex AO: Applicatum est igitur lineæ AB datæ solidum deficiens Cubo, æquale Cubo dato ex lineâ NO, quod habet rationem datam (scilicet quæ AC ad CB) ad solidum ex quadrato AD in DB: Sed solidum ex quadrato AD in DB simile est solido ex quadrato axis Hemisphærij in lineam quæ dupla est eiusdem; & est linea AB tripla lineæ AD: Necessario igitur pars AO erit ad totam AB, sicut in axe Hemisphærij pars BH ad triplum axis BD. Vnde etiam constat quod linea AB sit aggregatum extremarum (scilicet AO & OB) in serie quatuor linearum continuè proportionalium, quarum NO est vna ex medijs. Ideoque linea quæ tripla est axis BD, est aggregatum extremarum, quarum linea R latus Cubi æqualis Solido dato est vna ex medijs & BH minor extrema.

Manifesta satis ex præmissis apparet ratio quare multa Problemata non sint demonstranda per media plana vel Euclidis Elementa. Ideoque admoneo studiosos, ne labor sit cassus, vt primum, vbi difficultatem inuenerint, inquirant resolutionem Solidi faciendi, antequam nimium laboris & temporis in inuestigando consumpserint. Natura enim non permittit vt quod per triplicem rationem ipsa fecerit per duplicem resoluatur. Inter legendum forsan in alia huiusmodi incides, velut Q n 72. & 73. in quarum priore Portio Sphæræ constituitur ad Sphæram datam in ra-

tione datâ, dummodo fuerint eiusdem cum Sphæra altitudinis: Sed negatur nobis sine ope mediorum solidorum constituere portionem ad Spheram datam in ratione datâ; & in aliâ altitudine datâ, nisi forsan nota fuerit ratio sphærarum ad inuicem sub diuersis illis altitudinibus consistentium; & in illo casu problema soluendum est.

Iterum in 73. licebit in quâcunque altitudine minore constituere Portionem æqualem Sphæræ datæ: Atqui non licebit constituere portionem æqualem Sphæræ datæ quæ similis sit alteri portioni datæ, ob easdem causas præmissas.

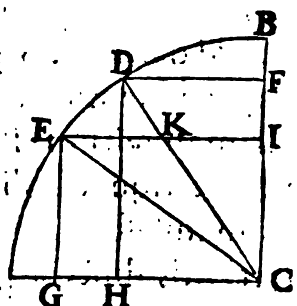
De Portionum & Segmentorum ad basim resolutione & Ratione ad Hemisphærium, mihi iam videtur satisfecisse quantum opus, solùm igitur restat vt aliquid dicam de Segmento Intermedio, de quo, quoniam ad Hemisphærium in ratione datâ constitui potest manifestum est quod in Resolutione ipsius non intersit aliquod Solidum specie vel formâ notum: quæ res manifestior fiet si consideremus quòd sit vel pars Portionis dissecta plano ad basim parallelo, vel pars Segmenti ad basim similiter dissecta. Vtraque verò illorum an sit non multum refert; Si enim sit pars segmenti ad basim, resolutio ipsius erit in Cylindrum vel triplum Coni super minori basi & eâdem altitudine, vnà cum portione Sphæræ speciei incognitæ; est enim maior vel minor secundum quantitatem segmenti quæ dissecatur. Si vero vt partem Portionis illud considéres, tunc magis ignotæ erunt partes ipsius; vtpote vel ex truncis Conorum, vel ex portione quadam Sphæ-

Segmentum intermedium.

roidis latissimul cum truncis Conorum compositæ; & propterea nihil impedit quin medijs planis demonstretur.

Analogia Circuli cū Sphæra.

Verumtamen obseruatione dignum hoc inuenio, quòd idem Semicirculo quod Hemisphærio accidat; licet diuersis modis efficiatur. Videlicet quòd sicut in Hemisphærio Segmentum intermedium æquale Sectori secundo & eiusdem superficiei sphæricæ, constitui potest, ex quo etiam in ratione datâ ad Hemisphærium constituitur; ita in Semicirculo, vel in quadrante circuli constituitur Segmentum intermedium æquale Sectori, & in ratione datâ ad quadrantem. Quicquid autem in quadrante efficitur, idem in Semicirculo fieri clarum est.



Sit igitur Quadrans circuli A B C, in cuius peripheriâ A B sumantur duo puncta D & E, æquidistantia à punctis A & B; ductisque ab vtroque ipsorum rectis ad centrum C, fiat Sector E C D. Iterum ductis perpendicularibus ab vtroque ipsorum ad latera quadrantis D F, D H, & E I, E G; Dico sectorem E C D esse æqualem quadrilatero E D F I vel E D H G, quorum eadem est linea curua E D cum Sectore E C D. Quoniam enim arcus D B æqualis est arcui E A, erit angulus DCB æqualis angulo ECA, ideoque propter æquales angulos rectos D F C & EGC, & æqualia latera D C & E C triangula D F C & E G C æqualia erunt. His etiam æqualia sunt triangula E I C

& DHC.

& DHC. Quare cùm triangulum DFC sit æquale triangulo EIC, addito vtrique trilineo mixto EDK, & dempto communi triangulo KIC, remanet Sector EDC æqualis quadrilineo vel segmento intermedio EDFI: quare eandem rationem habet segmentum intermedium EDFI ad totum quadrantem ABC; quam habet sector ECD ad eundem, vel arcus ED ad totum arcum AB: Vnde in Semicirculo (cùm omnia sint dupla) segmentum intermedium erit ad semicirculum sicut duplum arcus ED ad totam peripheriam semicirculi: & quemadmodum in Hemisphærio sunt duo Coni æquales, quorum bases sunt bases segmenti intermedij, ita in semicirculo sunt duo triangula æqualia quorum bases sunt latera ipsius segmenti Intermedij. Coroll. propo. 26. huius.

METHODVS GEOMETRICA

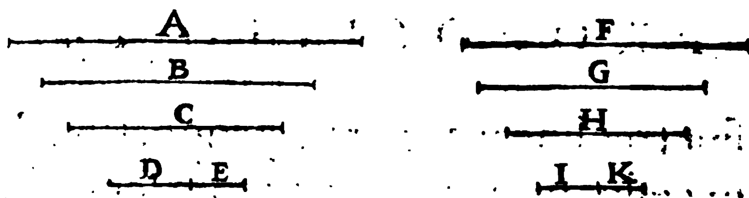
Pro Calculo, & Resolutione ad Aequationem Propositionis tricesimæ secundæ.

PROPOSITIO I.

Si sint quotcunque lineæ continue proportionales, & totidem aliæ in eâdem ratione, erit sicut priorum maior ad differentias earum vel ad quâlibet earum differentiam, ita maior posteriorum ad differentias posteriorum, vel ad quamlibet earum differentiam vicissim sumptam: Similiter & media vel minima ad quamlibet differentiam vicissim sumptam.

Sint enim tres lineæ continuè proportionales A, B, & C, quarum maxima A excedit B mediam quantitate D; B vero media excedit C minimam quantitate E; est igitur linea DE aggregatum excessuum vel differentiarum A supra B, & B supra C;

Sint

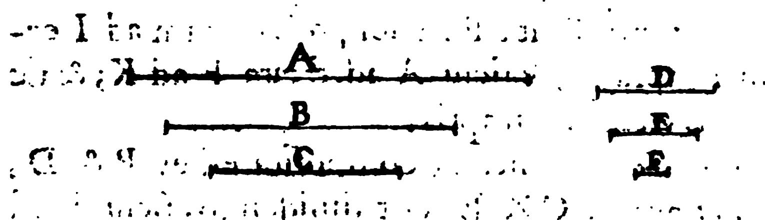


Sint etiam tres aliæ F, G, & H in eâdem ratione quâ priores, quarum excessus sint I, maioris F supra mediam G, & K, excessus mediæ G supra minorem H; & ideo I K aggregatum excessuum vel differentiarum earum: Dico quòd sicut A maior priorum ad D excessum A supra B, ita F maior posteriorum ad I excessum F supra G; & sicut A ad E, ita F ad K; & sic de reliquis vicissim sumptis.

Quoniam enim linea A composita est ex B & D, linea B etiam ex C & E, erit diuidendo, sicut B ad D, ita C ad E, & ex æquali (cum sint proportionales A, B, & C) sicut A ad D, ita B ad E. Simili modo demonstrabitur in posterioribus quòd sicut F ad I, ita G ad K; & cum sint in eâdem ratione A, B, & C, quâ sunt F, G, & H; erit, sicut A ad D, ita F ad I, &c. Sed cum sit sicut A ad D ita B ad E, erit permutando sicut A ad B, sic D ad E, & I ad K in eâdem ratione; Et ex æquali erit sicut A ad aggregatum ex D & E, ita F, ad aggregatum ex I & K. Similiter etiam demonstrabitur de reliquis vicissim sumptis, sicut in propositione enuntiatur.

PROPOSITIO II.

Si sint tres lineæ continuè proportionales, excessus primæ maioris supra secundam erit media proportionalis inter primam maiorem, & differentiam illius excessus quo maior excessus minorem superat.



Sint tres lineæ continuè proportionales A, B, & C, & sit D, excessus A supra B, & E excessus B supra C; F, verò sit differentia excessuum, vel excessus quo linea D, superat lineam E: Dico D, esse mediam proportionalem inter A & F: Cum enim sit sicut A ad B ita D ad E, erit sicut A, ad excessum suum supra B, ita D ad excessum suum supra E, scilicet ad F; D verò est excessus A supra B. Igitur sicut A ad D, ita D ad F: Quod erat propositum.

COROLLARIVM.

Trium igitur Proportionalium datâ maiore extremâ & differentiâ excessuum earum, inueniuntur reli-

quatur. Inter datam ergo A maiorem extremam & B differentiam excessuum inueniatur media proportionalis D, quæ ex A subtrahatur, & inuenta est B media proportionalis, sicut A ad B, ita B ad C tertiam proportionalem.

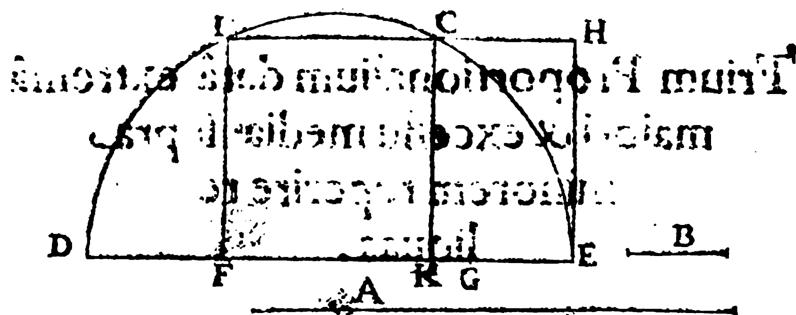
PROPOSITIO III.

Trium Proportionalium datâ extremâ maiori & excessu mediæ supra minorem reperire reliquas.



SIT A maxima trium proportionalium, & B excessus quo secunda excedit tertiam; Describatur igitur semicirculus DIE super diametro DE, quæ æqualis fiat lineæ datæ A, & ab eâ abscindatur pars EG æqualis datæ B, oportet autem quod B vel EG non sit maior quam quarta pars ipsius A, vel DE, vt postea patebit. Erigatur iam à puncto E perpendicu-

laris, a qua abscindatur pars EH, quæ sit media proportionalis inter DE & EG; & ab H, puncto ducatur parallela diametro DE, quæ secabit vel saltem tanget peripheriam circuli DAE; at si secuerit eam, secabit in duobus punctis: Secet igitur peripheriam in punctis C & I, a quibus ad Diametrum DE, demit-



tantur perpendiculares CK & IF. Quoniam igitur lineæ CK æqualis est linea HE, erunt & quadrata earum etiam æqualia; factum est autem quadratum ex HE, æquale rectangulo DEG, quadratum vero CK æquale est rectangulo DKE; rectangulum igitur DKE æquale est rectangulo DEG; & ideo sicut DE ad DK, ita KE ad EG; vnde per conuersionem rationis erit sicut DE ad EK, ita EK ad KG. Inuentæ sunt igitur tres quantitates proportionales, quarum DE prima æqualis A datæ, EK secunda & KG tertia, quarum differentia vel excessus GE æqualis est B datæ.

Similiter etiam demonstrabitur quod sint aliæ tres proportionales quarum DE maxima, & excessus mediæ supra minorem sit ipsa GE data. Quoniam enim

rectangulum D F E æquale erit rectangulo D E G; erit sicut D E ad D F, ita F E ad E G, & per conuersionem rationis sicut D E ad E F, ita E F ad F G; est igitur D E prima maior data, E F media, & F G tertia proportionalis, & excessus F E super F G est linea G E data.

Sed dixi quod oporteat B vel E G non maiorem esse quartâ parte lineæ A vel D E. Cum enim necesse sit rectangulum ex segmentis lineæ D E æquale esse rectangulo D E G; maximum autem rectangulum quod fit ex segmentis cuiusuis lineæ sit illud quod ex dimidijs fit scilicet quod æquale est quadrato ex dimidiâ, & huic æquale sit rectangulum ex totâ D E in quartam partem eiusdem D E: Oportet igitur quod G E (quæ est differentia excessus mediæ supra minorem) non sit maior quartâ parte totius.

Quales autem sint hæ duæ series proportionalium, quæ hic se præbent speculandas, quarum eadem est maxima, eademque differentia inter reliquas proportionales (duæ enim se præbent, & non plures) iam patefacere tentabimus.

Videamus igitur in numeris quomodo se habeant; & ponatur primo G E quarta pars lineæ D E, quæ (vti iam demonstrauimus) est maxima proportio, quam habere potest G E ad lineam D E, & in hoc casu solùm erit vna series proportionalium; media enim proportionalis inter G E & D E erit dimidia diametri D E, & ideo linea H C I, tanget semicirculum in eius polo, ex quo si dimittatur perpendicularis, cadet in centrũ; & sic K G æqualis erit E G, & tres proportionales erunt

4. 2. & 1. scilicet quadratum, radix, & vnitas.

Series illa proportionalium maioris inæqualitatis est quadrati radicis æternitatis.

Sed ponatur iam GE ad DE in minori ratione, scilicet sicut 2. ad 9. erit igitur KE, 3. quarum KG, 1. tres igitur proportionales DE, KE, & KG, quæ sunt maioris inæqualitatis erunt 9. 3. & 1. hoc est quadratum, radix, & vnitas: reliquæ vero proportionales scilicet DE, FE, & FG, quarum eadem est prima, & eadem est differentia reliquarum erunt 9. 6. & 4. quæ in numeris sunt minimæ in ratione KE, ad EG & ab Euclide KE & EG vocantur Termini, siue radices Proportionis; quoniam in eadem ratione minores sumi nequeunt.

Def. 25. lib. 7. Euclid.

Iterum ponatur GE, 3. quarum DE, 16. & erit KE 4. & KG 1. reliqua vero series proportionalium erit 16. 12. & 9. quæ sunt etiam minimæ in ratione KE, ad GE, 4. ad 3. Et in omnibus apparet quod KG habeat rationem vnitatis, KE radicis, & DE quadrati. Manifestum est etiam quod sicut KE est radix quadrati maioris DE, ita erit GE (differentia data) radix quadrati FG minoris.

II.

Apparet etiam quod ratio dupla, hoc est 4. 2. & 1. est media inter omnes rationes, sicut manifestum est in rationibus 3. ad 1. & 3. ad 2. inter quas 3. ad 1½ (hoc est dupla ratio) media est, & sic in omnibus alijs quæ eandem primam maiorem & eandem differentiam reliquarum habent.

III. Hoc intelligitur de illa serie proportionalium quæ sunt maioris inæqualitatis.

Hic etiam obseruandum est, quod, (sicut in secunda harum demonstrauimus) excessus primæ supra secundam est media proportionalis inter primam & differentiam excessuum; ita ex demonstratione huius ap-

paret quôd excessus ille sit radix maioris datæ, & quod differentia excessuum sit vnitas.

PROPOSITIO IV.

Trium proportionalium datâ extremâ minore & excessu quo maxima excedit mediam inuenire reliquas.

D F K G E

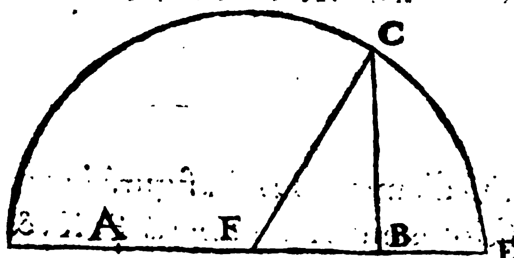
REpetitâ diametro DE in figurâ præcedentis propositionis diuisâ in Punctis F, K, & G, concipiatur data FG minor extrema, & DF excessus primæ maioris supra mediam, quibus in directum positis, producatur linea DG in E, vt sit rectangulum FEG, æquale rectangulo DFG dato; hoc autem quomodo fiet in sequente lemmate ostendemus. Quoniam igitur rectangulum DFG æquale est rectangulo FEG, erit sicut DF ad FE, ita EG ad GF; & componendo sicut DE ad EF, ita EF ad FG: est igitur EF media proportionalis inter DE & FG, & differentia inter DE & EF est linea DF data.

Si vero data fuerit KG minor in reliqua serie proportionalium, & DK differentia inter maiorem extremam & mediam, fiat sicut prius & inuenietur KE media proportionalis, æqualis DE, quæ erat excessus maioris supra mediam in serie priorum proportionalium.

LEM-

LEMMA.

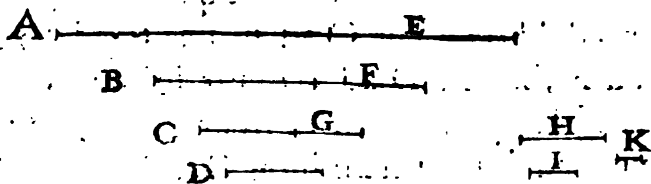
Datâ differentia laterum rectanguli, & mediâ proportionali inter latera inuenire rectangulum.



Sit data AB differentia laterum, tum BC media proportionalis inter latera quæsita; quibus in angulum rectum compositis, diuidatur AB bifariam in F, a quo ad C ducatur linea FC; facto iam centro F, & interuallo FC describatur semicirculus DCE, ad puncta D & E, lineæ AB in vtramque partem productæ. Quoniam igitur DF, & FE sunt æquales; sunt etiam AF & FB, erit DB æqualis AE, & ideo deductâ AB communi, reliquæ DA & BE æquales erunt; vnde excessus lineæ DB, supra BE, est linea AB data; rectangulum vero DBE æquale est quadrato CB; Igitur ex datâ CB mediâ proportionali inueniuntur latera DB, & BE; quarum differentia est linea AB data, quod erat faciendum.

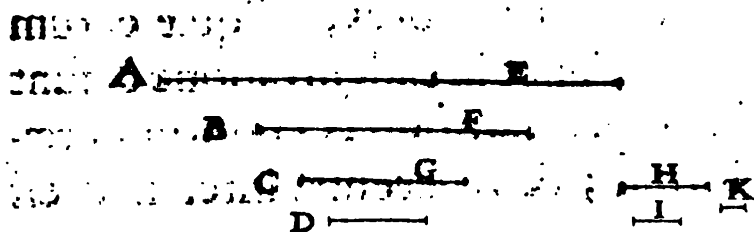
PROPOSITIO V.

Si fuerint quatuor lineæ continuè proportionales, in minori quam duplâ ratione, extremæ earum sunt Cubi; & si ex maioribus ordinatim deductæ fuerint minores, erunt tres excessus earum etiam proportionales in eâdem ratione qua priores, & earum extremæ, quadrata; & si iterum ex maioribus ordinatim deductæ fuerint minores, reliquæ earum erunt duæ lineę in eâdem ratione & sunt radices quadratorum & cuborum prædictorum; & differentia inter illas est vnitas.



Sint enim quatuor lineæ continuè proportionales A, B, C, & D, & sint minoris inæqualitatis quam duplæ ex quibus ordinatim dissectæ sint partes E, F, & G, scilicet quòd pars E sit excessus lineæ A supra li-

neam B; F excessus lineæ B supra lineam C, & G excessus C supra D. Sint iterum H excessus E supra F, & I excessus F supra G; Demum sit K differentia inter H & I. Iam demonstrauimus quod E, F, & G, similiter & H ad I, sint proportionales in eâdem ratione quâ A, B, & C: Nunc verò propositum est demonstrare quòd A, E, H & K, sint etiam proportionales maioris inæqualitatis quadruplæ, & quod A sit Cubus, cuius quadratum est linea E, & radix linea H, & K vnitas, quæ est differentia inter lineas H, & I; Similiter quòd D sit cubus, G quadratum, & I eorum radix; vnde sequitur etiam quòd sint proportionales D, G, I & K.



Per 1. harum.

Cum enim demonstratum sit quod sicut B ad E, ita sit F ad H, & sicut C ad F, ita G ad I; sed sicut C ad F, ita est D ad G; Est igitur sicut D ad G, ita G ad I: Cum etiam sit sicut G ad F, ita I ad H, erit sicut G ad differentiam inter G & F, sic I ad differentiam inter I & H; Sed I est differentia inter F & G, & K differentia inter I, & H; erit igitur sicut G ad I, ita I ad K, & ideo D, G, I, & K continuè proportionales.

Per 2. harum.

Demonstrauimus etiam quòd A, E, & H sint con-

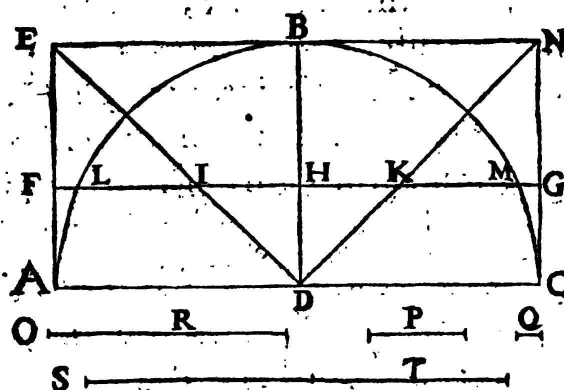
tinuè proportionales, & eâdem ratione E, H, & K ſunt proportionales; & ideo quatuor lineæ A, E, H, K, in ratione continuâ.

Iterum ex Corollario ad tertiam præcedentium propoſitionum, apparet, quod cum ſint duæ ſeries proportionalium, quarum eadem eſt maior & eadem differentia inter reliquas, vna (ſcilicet ea cuius proportionales ſunt maioris inæqualitatis) compoſita eſt ex quadrato, radice & vnitate, cui ſi addatur quarta proportionalis maior, illa erit Cubus: vnde ſequitur quòd cum E ſit quadratum, H radix, & K vnitas, neceſſario ſit linea A Cubus.

Quod autem differentia inter radices H, & I, ſit vnitas ſic monſtrabitur: In rationibus enim quæ in numeris denominantur cum differentiâ vnitatis, ſicut in 4. ad 3. vel 5. ad 4. & reliquis, neceſſario ſequitur, ex ipsâ enim denominatione apparet: Si vero denominationem habeant cum maiori differentiâ, veluti ſicut 5 ad 3. & 13. ad 9. (quæ etiam reducuntur ad proportiones cum differentiâ vnitatis, ſicut ad 2. $\frac{1}{2}$ ad 1. $\frac{1}{2}$ & 3. $\frac{1}{4}$ ad 2. $\frac{1}{4}$) nihil præbent difficultatis niſi quòd in numeris ſint fractæ: In lineis vero quæ ſunt quantitates continuæ, nulla eſt difficultas, ſed eadem ſemper ratio quæ in reliquis.

His ita præparatis, videamus quid colligi poſſit ex propoſitione 32. circa Proportionem Portionis ad Hemiſphærium, & poſtea quomodo inſtitui poſſit calculus, vt inde exploremus, an, ſeruatis geometriæ legibus, demonſtrari poterit illud Problema Archimedis, Sphæram datam in ratione datâ ſecare.

Demonstratum est enim per 31. quòd excessus Cylindri supra Conum rectangulum æqualis sit Hemisphærio, ac etiam quòd singulæ partes singulis partibus inter eadem plana interceptæ sint etiam æquales, vnde per comparationem Coni qui per intersectionem factus est, ad Conum rectangulum, assequimur etiam proportionem excessûs Cylindri dissecti eodem plano ad totum excessum Cylindri supra Conum rectangulum: quæ proportio eadem est quam habet Portio ad Hemisphærium: Sunt enim æquales.



Sit igitur Hemisphærium ABC, centrum D, axis BD, & Cylindrus EC, circa eundem axem & super eâdem basi, & in eo inscriptus sit Conus rectangulus EDN; secentur omnia plano FG basi AC parallelo, secante Hemisphærium in L & M, Conum vero rectangulum in I & K, & axem eorum communem in H puncto. Quoniam igitur Coni EDN, & IDK sunt similes, erit Conus EDN ad Conum IDK in triplicatâ ratione axis BD ad axem HD; Sit igitur lineis BD & HD, æquales O & P, & sit O ad Q

tripli-

triplicata ratio eius quam habet ad P: Conus igitur EDN se habet ad Conum IDK, sicut linea O ad lineam Q; Deductâ iam ex O parte æquali lineæ Q, reliqua R erit ad totam O, sicut truncus Coni EIKN ad Conum EDN: Fiat etiam linea S æqualis triplo excessui O supra P, vel triplæ BH, ex quâ deductâ parte æquali lineæ R, reliqua T erit ad totam S, sicut excessus Cylindri EG supra truncum Coni EIKN hoc est sicut Portio LBM, ad Cylindrum EG; Sed Cylindrus EG, est ad Conum EDN, sicut tripla BH ad BD, hoc est sicut linea S ad lineam O, ex æquali erit sicut T ad O, ita portio LBM ad Conum EDN: Sed Conus EDN, est medietas Hemisphærij ABC, erit itaque sicut T ad duplam O, ita Portio LBM ad Hemisphærium ABC: vnde sequitur quòd, datâ ratione in quâ secatur axis Hemisphærij, detur etiam ratio portionis ad Hemisphærium. Sed videamus vlterius, quænàm sit linea R, & ex quibus componatur.



Sint igitur quatuor lineæ continuè proportionales A, B, C, & D, quarum A maior sit æqualis axi Hemisphærij BD, & secunda B, æqualis DH, reliquæ C, & D, in ordine proportionales; Iam ex A resecetur pars æqualis B, & excessus notetur E; Iterum ex parte quæ æqualis est B, resecetur pars æqualis C, & residua sit F; demum ex reliquâ quæ æqualis est C,

colla-

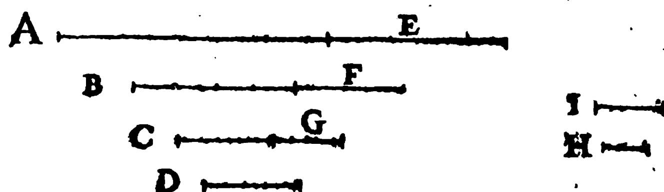
tollatur pars æqualis D, & residua erit G; Igitur E, F, & G, erunt excessus proportionalium A supra B, B supra C, & C supra D, & simul sumptæ æquales lineæ R præcedentis figuræ) & quæ relicta est lineæ A, æqualis est Q quartæ proportionali. Cum igitur linea R, sit aggregatum trium linearum proportionalium in ratione A ad B, vel BD ad HD, linea vero S, sit æqualis triplæ maiori, (facta est enim æqualis triplæ BH vel triplæ E) erit pars T excessus triplæ maioris supra tres proportionales; Sed demonstratum est quòd Portio LBM, se habeat ad Hemisphærium ABC, sicut T ad duplam O; Portio itaque se habet ad Hemisphærium sicut excessus triplæ maioris supra tres proportionales ad duplam maioris quatuor proportionalium, quarum illæ tres prædictæ erant excessus. Vnde.

COROLLARIVM.

Si sint quatuor lineæ continue proportionales quarum maxima data sit; data etiam sit differentia inter duos excessus minores, Rectangulum ex datâ maiori in differentiam datam æquale erit rectangulo ex duobus excessibus maioribus.

Sint enim quatuor lineæ continuè proportionales A, B, C, & D, quarum excessus sint E, F, & G,

& ideo in eâdem ratione quâ sunt quatuor priores; & sit linea I excessus E supra F, H verò differentia inter F & G duos excessus minores; Dico quòd rectangulum ex A in H, æquale sit rectangulo ex E, in F, duobus excessibus maioribus. Cum enim demonstratum sit, quòd sicut A ad B, ita sit F ad G; per conuersionem rationis erit sicut A ad excessum A supra B scilicet ad E, ita F ad excessum F supra G, hoc est ad H, & ideo rectangulum ex E in F, æquale erit rectangulo ex A in H, quod erat.



Sequitur etiam quod rectangulum ex A in I æquale sit quadrato E; Ideoque quod rectangulum ex A in compositam ex I & H, sit æquale quadrato E vnà cum rectangulo ex E in F, vel rectangulo ex composità ex E & F in E. II.

Demonstratio Aequationis Analiticæ Propositionis 32. ex præcedentibus.

QVoniam enim demonstratum est propositione 2. harum quòd quadratum E æquale sit rectangulo ex A in excessum E supra F, scilicet li-

neam

neam I, & iam demonstrauimus quòd rectangulum ex E in F æquale sit rectangulo ex A in H; Si igitur sumatur excessus triplæ E, supra E, F, & G, hoc est linea I bis, cum lineâ H semel (quæ simul sumpta ad duplam A, habent rationem quam habet portio ad Hemisphærium) & ex illis fiat rectangulum in A, erit illud æquale duobus quadratis ex E, vnâ cum rectangulo ex E in F, vel quod idem est tribus quadratis ex E, minus rectangulo ex E in I: Sed iam ostensum est quòd linea I (dum sint A, E, & I in maiori quam duplâ ratione vel saltem in duplâ) sit radix cubica lineæ A, & quòd linea E quæ media est proportionalis inter A & I sit quadratum, vnde ex applicatione vel multiplicatione E in I, factus est Cubus cuius latus linea I: æquale igitur est rectangulum ex A in excessum triplæ E supra E, F, & G, tribus quadratis ex E, minus Cubo ex I: Quoniam verò æquatio ista excedit rationem planorum (vt apparet ex prædictis) 11 videamus quomodo, seruatis proportionibus, fieri possint solida; vt inde exploremus quomodo soluendum sit Problema.

Rectangulum igitur ex E, in I, ad quadratum E, est sicut linea I ad lineam E; eandem etiam rationem habet cubus ex I ad solidum ex E in quadratum I. Sed sicut I ad E, ita E ad A.

Igitur Cubus ex E ad solidum ex A in quadratum E, eandem rationem habet, quam I ad E. Iterum rectangulum ex A in excessus prædictos æquale est triplo quadrato ex E, minus rectangulo ex A in I, Applicato igitur vtrobique latere A, vt fiant soli-

da, erit solidum ex quadrato A in excessus prædictas æquale solido ex triplo A in A in I, minus solido ex A in E in I. Sed rectangulum ex A in I, æquale est quadrato E; & solidum ex A in E in I, cum sint proportionales æquale est Cubo ex E. Solidum igitur ex quadrato A in excessus prædictos æquale est solido ex triplo A in quadratum E, minus cubo ex E. Cùm igitur ex applicatione lateris A, non mutetur ratio, & appareat ex demonstratis, quòd excessus Cubi E supra solidum ex triplo A in quadratum E, sit in eâdem ratione quâ rectangulum ex E in I ad triplum quadratum E; manifestum esse debet quòd recta sit æquatio. Data autem est linea A, scilicet axis Hemisphærij secandi in ratione datâ; dantur etiam excessus prædicti, scilicet qui habent rationem ad duplum axem eandem, quæ data est, in quâ debeat secari Hemisphærium; Igitur & solidum ex quadrato A in excessus prædictos datur. Datum est etiam triplum A; quærendum est igitur quadratum E, ex cuius applicatione ad triplum A, proueniet solidum æquale solido dato excedens cubo. Inuento igitur latere E, secetur axis Hemisphærij plano basi parallelo, ita vt pars superior axis æqualis sit lineæ E, & Hemisphærium secabitur in ratione datâ, scilicet, sicut excessus prædicti ad duplum axem vel diametrum Hemisphærij. Hoc autem non potest fieri sine ope alicuius loci Solidi; veluti per lineam Cubatricem, supra expositam, aut per compositionem duarum simul Sectionum Conicarum; quemadmodum ab Eutocio in Commētarij in Archimedem de Sphærâ & Cylindro duobus

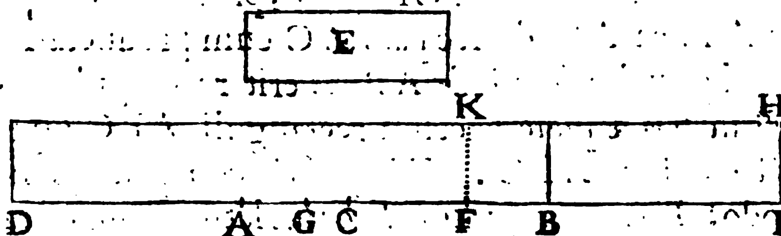
Per prop. 37.

modis pulcherrimis relatum inuenio: quorum prior inuentioni Dionysodori refertur, per compositionem Parabolæ cum Hyperbolâ: alter vero Diocli attribuitur, & fit per compositionem Hyperbolæ cum Ellipsi: Vterque pulcherrimus & difficillimus; ex quo videre licet quantum sudarint veteres Geometræ circa resolutionem huius pulcherrimi Problematis. Neque idcirco inscitiæ arguendi sunt hi, propterea quòd non effecerint illud, quod tentarunt, sed insolentiæ potius, quòd tentauerint illud quod Archimedes infectum reliquit. Hoc me deterruit primùm, & nunquam hunc campum lustrassem, nisi a fratre meo carissimo, nihil imperuium existimâte, & cuius ope & ingenio acutissimo fretus primùm hoc incepi, & eodem instigante tandem huc perduxi. Præcipuum autem institutum mihi fuit, Veritates nouas in lucem proferre & in his quæ rationibus planorum non subijciuntur, demonstrare, quare ita sint, & quâ ratione eorum inuestiganda sit Resolutio, cui negocio quantum satisfecerim aliorum esto Iudicium.

APPENDIX
DE CONO SCALENO.

PROPOSITIO I.

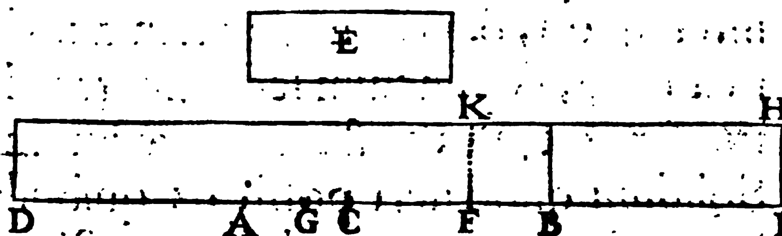
Si recta linea secta fuerit vtcunque, inuenire in aliquo ipsius segmento Punctum, inter quod, & vtrumque terminum lineæ datæ, & punctum sectionis tres lineæ interceptæ constituant maximum Solidum quod fieri possit ex quibuslibet rectis a tribus prædictis punctis ad aliquod in eodem segmento punctum, ductis.



SIT linea data AB diuisa vtcunque in puncto G, & concipiatur factum, & quòd punctum F in maiori segmento CB, sit punctum quæsitum, a quo tres lineæ a punctis A, C, & B ductæ, videlicet AF, CF, & BF faciant Maximum Solidum quod fieri potest a quibuslibet lineis a punctis A, B, & C ad aliquod

punctum in parte CB ductis. Inter AF & GF igitur cadat GF media proportionalis, & per ea quæ demonstrata sunt, GF erit dupla ipsius FB, (si enim non fuerit dupla, quadratum GF in FB non erit maximum solidum quod fieri possit ex segmentis lineæ GB) ideoque quadratum GF, vel rectangulum AFC erit quadruplum quadrati FB.

Per 42. huius.

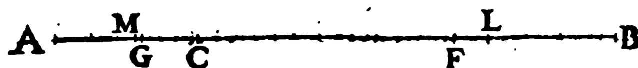


Quoniam autem rectangulum ABC excedit rectangulum AFC, quantitate rectanguli AB in BF vnà cum rectangulo ex CF in BF, producatur ad partes A linea AB, donec pars AC cum productâ AD simul æquales sint ipsæ AB, & erit rectangulum ex DF in FB æquale excessui rectanguli ABC supra rectangulum AFC. His positis componatur hoc modo: Fiat rectangulum E cuius latus maius est triplum minoris & ita constituatur vt maius latus eius sit parallelum lineæ AB datæ. Applicetur iam lineæ DB inuentæ latus faciens rectangulum æquale rectangulo ABC, excedens verò rectangulo simili rectangulo E similiterque posito: quod sit rectangulum DH, cuius excessus rectangulum BH supra lineam DB, sit similis rectangulo E similiterque positus: Inuen-

to que

toque iam lateri H I fiat B F æqualis. Dico punctum F esse punctum quæsitum, & solidum ex rectangulo A F C in lineam F B, esse maximum quod fieri potest ex quibuslibet lineis a punctis A, B, & C ad aliquod punctum in parte C B ductis. Ducatur enim ab F linea F K parallela H I,

Et quoniam per constructionem factum est rectangulum D H æquale rectangulo A B C; excessus autem rectanguli ABC supra rectangulum AFC, æqualis est rectangulo ex A B & C F tanquam vnâ in F B; linea verò D C facta est æqualis lineæ A B; factum igitur ex D F in F B, hoc est rectangulum D K, æquale est excessui rectanguli ABC supra rectangulum AFC, & reliquum rectanguli D H scilicet F H, reliquo rectanguli A B, hoc est rectangulo A F C æquale erit. Sed rectanguli B H latus B I est triplum lateris I H, cui æqualis facta erat linea F B, quadrupla igitur est linea F I lineæ F B, vel lateris I H; Ideoque Rectangulum F H vel A F C ei æquale est quadruplum quadrati F B. Quare inuentum est in parte C B punctum F sicut oportuit, & manifestum est quòd Solidum ex quadrato G F in F B sit maximum omnium quæ fieri poterunt ex quibuslibet segmentis lineæ G B.

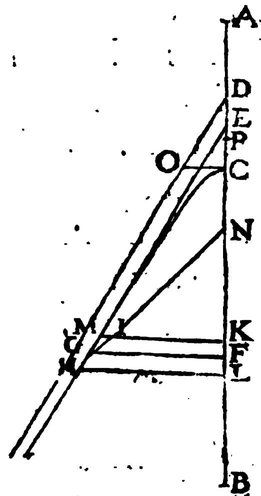


Quamuis iam mihi videtur satisfactum Problemati, attamen quoniam obijci potest quòd si aliud sumatur punctum putà L in parte F B (nam in parte F C manifestum est ex 42. huius quòd omnia solida erunt

Nam media proportionalis minor est quà G F.

mino-

minora) nondum ex demonstratis appareat, quòd solidum ex rectangulo ALC in LB fuerit minus Solido ex rectangulo AFC in FB. Nam lineæ quæ media proportionalis est inter AL & LC, videlicet LM, erit linea quædam cuius terminus punctum M erit proprior A, quam est punctum G, ideoque tota MB maior GB; Quare linea MB ita secari potest, vt licet Solidum ex quadrato ML in LB non fuerit maximum quod fieri potest ex segmentis eiusdem ML, attamen maius vel æquale solido ex quadrato GF in FB. Vt igitur huic obiectioni satisfacerem composueram quandam demonstrationem, quæ ob media necessaria & aliquos casus particulares, mihi videbatur adeo prolixa, vt melius duxerim illam prorsus omittere, & eius loco hanc sequentem per lineam Hyperbolicam ponere.



Sit igitur recta AB secta vt supra in puncto C, & in F, ita vt rectangulum AFC sit quadruplum quadrati FB. Erectâ iam a puncto F perpendiculari FG æquali lineæ FB, & facto C vertice, describatur Hyperbola CGH transiens per punctum G. Quare cum Rectangulum AFC sit quadruplum quadrati FG, erit AC diameter sectionis quadrupla recti lateris; A puncto igitur C erigatur perpendicularis, & fiat æqualis quartæ parti lineæ AC, & diuisâ bifariam AC in D, erit D centrum Sectionis, & ductâ DO & produ-

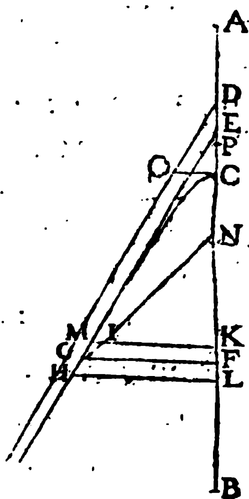
21. lib. 1. Appol. Conic.

ctâ in infinitum erit DO producta asymptotos Hyperbolæ CGH. Sumpto iam puncto L vtcunque in parte FB; Dico Solidum ex rectangulo ALC in LB minus esse Solido ex rectangulo AFC in FB vel FG: Erigatur enim perpendicularis LH occurrens sectioni in H, & a puncto G ducatur recta GE æquidistans DO sectionis asyptoto; & si connectantur puncta G & H rectâ productâ in concursum diametri sectionis AC, coincidet illâ inter E & C; quare pars eiusdem intercepta inter puncta G & H erit intra sectionem, reliqua vero extra: sit autem P punctum concursus in lineâ EC; Fiat iam sicut LP ad FP, ita FP ad KP, & a K erigatur perpendicularis occurrens rectæ PGH. in M, extra sectionem.

Et quoniam factum est sicut LP ad FP, ita FP ad KP, erit similiter in eâdem ratione sicut LH ad FG, ita FG ad KM; & sicut quadratum LH ad quadratum FG, ita linea LH ad lineam KM: Sed rectangulum ALC ad rectangulum AFC ob Hyperbolam se habet sicut quadratum LH ad quadratum FG, ex æquo igitur se habebit linea LH ad lineam KM, sicut rectangulum ALC ad rectangulum AFC; Ideoque Solidum ex rectangulo ALC in rectam KM, æquale erit solido ex rectangulo AFC in rectam FG vel FB.

Supponatur autem iam quod linea KM ordinatim applicata sit a sectione ad diametrum, ideoque quod cadat proprius lineæ FG quam est linea KM, & propterea tota sit intra Sectionem. Rursus quoniam triangulum EFG simile est triangulo DCO, erit EF

dupla



dupla FG, quare fiat FN æqualis FG, & ducta sit NG, quæ secabit lineam KM in I puncto, & erit KI minor quam KM: Sed KI vel KN maior est quam LB, multo igitur maior est KM ipsâ LB, ideoque solidum ex rectangulo ALC in LB minor est solido ex ALC in KM, vel ex AFC in FB quod demonstrandum erat.

Quod autem KI vel KN sit maior quam LB sic probatur. Cùm enim LP, FP, KP sint per constructionem continuè proportionales, erit differentia ipsarum LF maior differentiâ FK, sed FB & FN sunt æquales; Igitur KN vel KI maior est quam LB.

Hoc iam demonstrato manifestum est quòd maior sit ratio FB ad LB quam Rectanguli ALC ad rectangulum AFC, & ideo in figurâ præcedente, quòd PN maior sit FB sicut assumptum fuit. Maximum igitur solidum quod fieri potest ex quibuslibet tribus rectis a punctis A, B, & C ad aliquod punctum in parte CB ductis, est illud quod fit ad punctum F, scilicet ex lineis AF CF & BF, ita vt rectangulum AFC sit quadruplum quadrati BF.

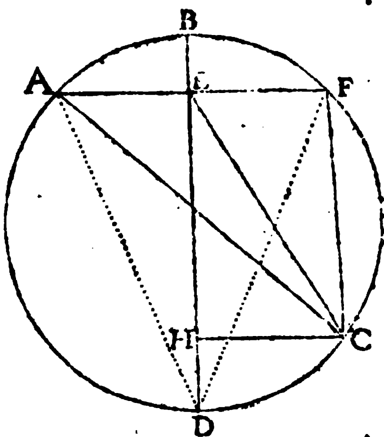
Idem etiam demonstrabitur in minore segmento quando punctum F ita sumptum fuerit vt rectangulum AFC sit quadruplum quadrati BF.

PRO-

PROPOSITIO II.

Si in ſphærâ inſcriptus fuerit Conus Scalenus, & per centrum baſis ipſius ducta fuerit diameter Sphæræ, ad quam a vertice Coni Scaleni cadat perpendicularis ſecans ipſam. Conus ille Scalenus erit ad Sphæram in quâ inſcribitur, ſicut Solidum ex tribus ſegmentis diametri Sphæræ terminatis ad centrum baſis ipſius Coni, ad dimidium Cubi totius diametri Sphæræ.

IN Sphærâ ABCD inſcribatur Conus aliquis Scalenus ACF cuius vertex C, baſis circulus circa diametrum AF, & centrum ipſius E, per quod & centrũ Sphæræ ducatur recta BED, quæ ideo erit diameter vel axis ſphæræ. Iam ductâ perpendiculari a vertice Coni Scaleni C ad axem ſphæræ,



ſecante ipſum in H puncto, ductiſque rectis DA & DF, concipiatur in eâdem Sphærâ Conus rectus ADF. Dico Conum Scalenum ACF eſſe ad Sphæram ABCD, ſi-

CD, ſicut ſolidum ex tribus lineis DE, BE & HE ad dimidium Cubi ex diametro BD.

Lemma ad Prop. 59.

Quoniam enim Conus rectus ADF eſt ad Sphæram ABCD, ſicut Solidum ex quadrato DE in EB, vel ex rectangulo DEB in ED ad dimidium Cubi ex DB; Conus vero Scalenus ACF, cum habeat eandem baſim AF, eſt ad Conum rectum ADF, in ratione altitudinis ipſius, ſcilicet rectæ EH ad rectam ED altitudinem Coni recti ADF, vel ſicut ſolidum ex rectangulo DEB in EH ad Solidum ex eodem rectangulo DEB in ED; ex æquo igitur Conus Scalenus ACF ſe habet ad Sphæram ABCD, ſicut ſolidum ex tribus lineis DE, HE, & BE ſegmentis diametri BD terminatis ad punctum E centrum baſis Coni Scaleni ACF, ad dimidium Cubi totius diametri Sphæræ, ſicut demonſtrandum erat.

12. Eucl. Prop. 14.

COROLLARIUM.

Hinc elicitur, quòd Conorum in eâdem Sphærâ inſcriptorum, & eandem habentium baſim, maximus ſit Conus rectus; & Scalenorum ad inuicem, ſemper maior ille cuius axis minùs inclinatus ſit baſi. Nam ſi concipias in præcedenti figurâ, punctum C eſſe propius puncto D in parte DC, vnde angulus ad E factus fuerit minor angulo CED, tunc punctum H in axe, in quod cadit perpendicularis a puncto C, erit propius puncto D, ideoque altitudo Coni illius maior erit altitudine EH Coni ACF, & proinde maiorem rationem habebit ad Sphæram ABCD, in quâ

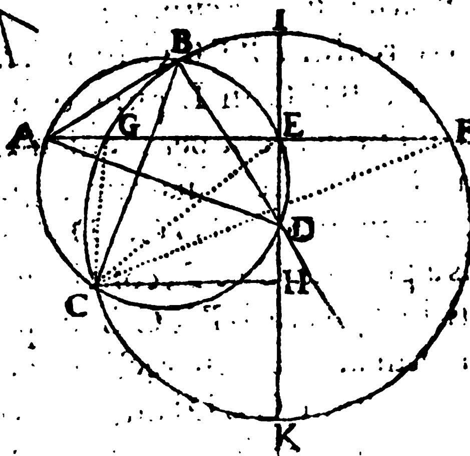
inſcri-

inscribitur. Solidum enim ex rectangulo DEB in altitudinem ipsius, maius est solido ex rectãgulo DEB in EH. Simili ratione, quando vertex Coni Scaleni erit in parte peripheriæ CE, ita vt angulus inclinationis maior fuerit angulo CED, minor erit altitudo ipsius coni, & propterea minorem rationem habebit ad Sphæram in quâ inscribitur, quàm Conus ille qui habet minorem inclinationem ad diametrum Sphæræ, & super eâdem basi constituitur.

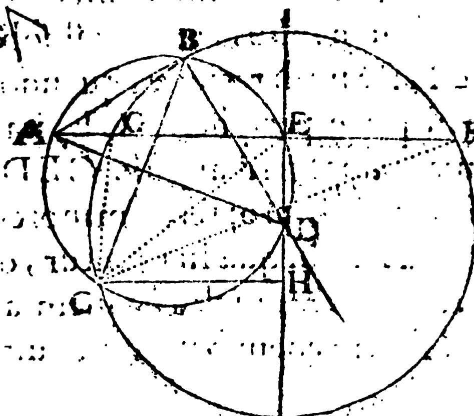
PROPOSITIO III.

Si Conorum Scalenorum in Sphærâ inscriptorum, & similiter inclinatorum vnum sit punctum verticis, omnia Centra basium ipsorum in eodem erunt Circulo.

SIT Circulus ABDC, in cuius peripheriâ sumatur vtcũque punctum A, a quo ducatur diameter eius AD. Proposito iam quocunque angulo acuto, putà S, pro angulo inclinationis alicuius Coni Scaleni, & sumpto puncto C, ita vt



peripheria CABD capiat angulum æqualem angulo S, ducatur ab illo recta CB ad angulos rectos ipsi AD, & iungatur BD; Facto iam centro D & interuallo DB describatur circulus BF-KC, & concipiatur (quando opus) ex reuolutione ipsius, Sphæra; Dico omnes Conos Scalenos habentes eundem verticem C, & axes suos inclinatos a perpendiculari secundum angulum S, & in eâdem Sphærâ BFKC inscriptos, habere basium suarum centra in ipsâ peripheriâ circuli ABDC.



Ducatur enim vtcunque a puncto A, recta AGEF secans circulum BFKC in punctis G & F, peripheriam verò BDC in E puncto, a quo ad centrum D recta ED ducta erit perpendicularis ipsi GF, ideoque recta GF diuisâ est bifariam in puncto E intersectionis cum circulo ABDC. Ductis iam ad punctum C rectis a punctis G & F, concipiatur GCF conus Scalenus in Sphærâ BFKC inscriptus, cuius axis CE inclinatur ab axe Coni recti, hoc est a lineâ ED secundum angulum CED; angulus verò CED, cum inscriptus sit in portione circuli CABD, æqualis est angulo proposito S: Quare manifestum est punctum E

(quod centrum est basis Coni Scaleni GCF) esse in peripheria circuli ABDC,

Quòd autem nullus sit Conus Scalenus cuius basis centrum sit extra peripheriam eiusdem circuli BDC, & qui habeat eandem inclinationem, scilicet anguli S, facilè ex hoc deducitur. Supposito enim primò, quòd CE fuerit etiam axis alicuius Coni Scaleni similiter inclinati, cuius basis centrum non fuerit idem punctum E, sed vel extra peripheriam BDC vel intra; si ab illo, (vtcunque fuerit) ducta sit recta ad D centrum Sphæræ, faciet angulum vel maiorem vel minorem angulo CED, hoc est angulo proposito S. Absurdum igitur est dicere quod centrum basis Coni Scaleni cuius vertex C punctum, inscripti sphærâ BFKC, possit esse extra peripheriam circuli BDC. Si vero axis Coni non fuerit eadem recta CE, verùm aliqua alia recta a puncto C ducta, nihil refert; nam semper linea a puncto A ducta ad punctum intersectionis ipsius rectæ cum peripheria BDC habebit partem ipsius interceptam in circulo BFKC diuisam ab ipso puncto bifariam, & nullum aliud punctum potest dari extra peripheriam BDC, a quo idem efficiatur. Quare manifestum est quòd omnes Coni Scaleni, quorum idem est vertex C, similiter inclinati & inscripti Sphærâ BFKC, habeant basium suarum centra in circulo ABDC.

COROLLARIVM.

Hinc & ex prius demonstratis manifestè apparet, quòd producta vtrinque EH ad I, & K, ita vt linea

IK sit axis sphæræ BFKC, in quâ inscribitur Conus Scalenus BCF, ipse Conus Scalenus habeat ad Sphæram eandem rationem, quam habet Solidum ex rectangulo KEH in EI ad dimidium Cubi totius diametri IK: Vnde etiam constat, quòd si rectangulum KEH sit quadruplum quadrati EI, tunc Conus Scalenus GCF sit maximus qui in eâdem inclinatione inscribi possit in eâdem sphærâ.



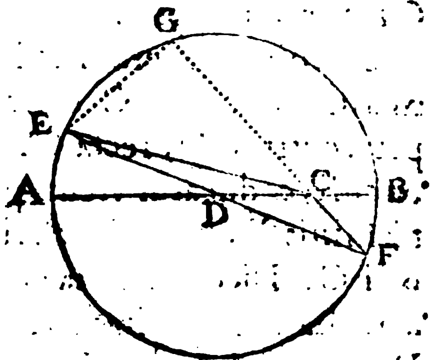
PROPOSITIO DE SVPERFICIE CONI SCALENI.

In quà aliquæ paſsiones Circulorum aperiuntur.

PROPOSITIO I.

Quadrata binarum rectarũ a terminis alicuius diametri ad aliquod punctum, ſiue intra, ſiue extra circulum ductarum, ſimul ſumpta æqualia ſunt binis quadratis, quæ a terminis cuiuſcunque alterius diametri ad idem punctum ducuntur.

SIt Circulus cuius centrũ D, & intra ipſum ſumatur vtcunque punctum C, per quod & centrum D tranſeat diameter A B: ductâ jam vtcunque diametro E F, a terminis ipſius ad punctũ C ducantur rectæ E C & F C. Dico aggregatum quadratorum ex E C & F C ſimul æquale eſſe aggregato ex quadratis A C & B C.



Producatur enim FC ad peripheriam in G & connectantur puncta GE. Et quoniam triangulũ FCE est ambligonium, quadratum quod fit ex FE angulũ obtusum subtendente maius est duobus quadratis ex FC & CE. quantitate duorum rectangulorum ex FC & CG; nam linea EG est perpendicularis ipsi FG: Sed quadratum FE æquale est quadrato ex AB; rectangulum etiam FCG æquale est rectangulo ACB; deductis igitur vtrobique duobus rectangulis FCG & ACB, duo quadrata ex FC & CE æqualia erunt duobus quadratis ex AC & CB.

Similiter demonstrabitur, etiamsi punctum C sumatur extra circulum, quòd quadrata rectarum EC & CF simul sumpta, æqualia sint quadratis ex AC & CB simul sumptis.

Sit enim vt supra circulus cuius centrum D, & sumatur punctum C extra circulum, a quo ducatur per centrum D, recta CBDA, & erit AB diameter circuli, & ducatur vtcunque alia diameter EF, a cuius terminis E, & F, ductæ sint ad C punctum rectæ EC & FC. Dico quadrata ex EC & CF simul sumpta, æqualia esse quadratis ex AC & CB simul sumptis. Ducatur enim recta FG, quæ perpendicularis erit rectæ EC.

Et quoniam angulus ECF est acutus, quadratum

quod fit ex latere E F illum subtendente, minus est quadratis ex duobus lateribus E C & C F ipsum comprehendentibus, quantitate duorum rectangulorum, scilicet ex vno laterum F C & parte C G inter angulum C & perpendicularem F G interceptam: Sed rectangulo ex E C C G æquale est rectangulum ex A C & C B: Duo igitur quadrata ex E C & C F simul sumpta, excedunt quadratum ex latere E F, quantitate duorum rectangulorum ex A C C B. Quadrata verò ex A C & C B excedunt quadratum ex A B eâdem quantitate, scilicet, duorum rectangulorum ex ipsis A C & C B. Duo igitur quadrata ex A C & C B simul sumpta, æqualia sunt aggregato duorum quadratorum ex rectis E C & C F factorum. Quod demonstrandum erat.

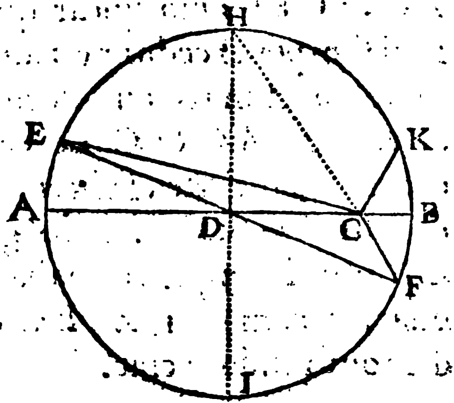
DEFINITIO.

Si aggregatum ex pluribus magnitudinibus diuidatur secundum numerum ipsorum in partes æquales, Magnitudo ex diuisione inuenta vocetur Media Arithmetica inter omnes.

COROLLARIVM.

Hinc deducitur quòd, si ducta fuerit diameter H I ad rectos angulos ipsi A B, & iungatur H C, quadratum ex H C erit medium arithmeticum inter omnia quadrata rectarum ducendarum ab omnibus punctis peripheriæ circuli A H B I ad punctum C.

Concipiantur enim in semicirculo AHB quotcunque puncta per æquales arcus ad inuicem distantia, ex quibus sumantur quæcunque duo puncta putà E & K æqualiter ab A & B distantia, & puncto C, connectantur rectis E C & K C; Ductâque diametro EDF Manifestum est quod arcus F B & B K sint æquales, ideoque etiam rectæ FC CK; quare duo quadrata EC & CK æqualia sunt duobus quadratis ex AC & CB simul sumptis: Sed linea AB diuisa est bifariam in D & non bifariam in C; quare quadrata ex A C & C B simul, æqualia



sunt duobus quadratis ex AD vnà cum duobus quadratis ex DC, hoc est, duobus quadratis ex HC: Duo igitur quadrata ex H C æqualia sunt quadratis ex E C & C K simul sumptis. Quantò ergo quadratum ex EC superat quadratum ex H C, tantò idem quadratum ex HC superat quadratum ex C K, & sic semper per totum semicirculum AHB, vbicunque sumpta fuerint bina quæcunque puncta in peripheriâ a punctis A, & B, æquidistantia, quadratum ex HC erit inter quadrata rectarum ad punctum C ductarum medium Arithmeticum, sicut dictum fuit.

Si vero punctum C fuerit extra circulum in diametro productâ, per 10. secundi Euclidis demonstrabitur etiam, quòd si ducatur ab illo recta ad punctum H,

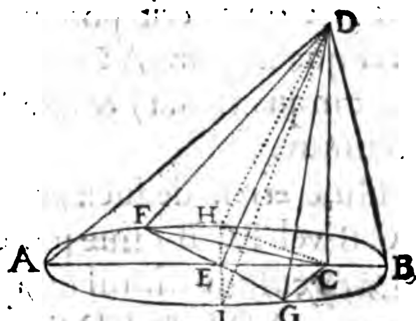
recta sic ducta erit potentiâ Medium Arithmeticum inter quadratum A C (hoc est ex compositâ ex A B, B C tanquam vnâ) & quadratum C B partem extra circulum.

Hinc etiam deducitur, quòd duo spatia A C E & K C B vel F C B ([redacted]) simul sumpta, æqualia sint duobus sectoribus A D E & F D B: Triangula enim D E C & F D C, cùm insistant eidem basi D C, & sint eiusdem altitudinis (nam perpendiculares a punctis F & E ad diametrum A B demissæ æquales erunt) sunt inuicem æqualia: Ideoque deducto ex spatio A C E, triangulo D E C, & addito spatio F C B triangulo D F C, erunt duo sectores A D E, F D B, duobus spatijs A C E & F C B, vel K C B æquales. II.

PROPOSITIO II.

Inuenire in superficie Coni Scaleni rectam, cuius quadratum sit Medium Arithmeticum inter omnia quadrata laterum in superficie Coni Scaleni ductorum.

HIS positis exponatur Conus aliquis Scalenus A D B cuius basis sit Circulus A H B I, diametri A B & H I ad rectos angulos, vertex D, a quo cadat perpendicularis D C in diametrum A B: Ducatur



tur iam alia diameter vtcunque F E G, a cuius extremitatibus F & G punctis, ducantur in superficie coni A D B rectæ F D & G D, connectanturque A D B D & H D: Et quoniam recta DC est perpendicularis ad planum basis, faciet angulos rectos cum lineis A C, B C, F C, & G C; quadrata vero ex F C & G C simul sumpta demonstrantur esse æqualia duobus quadratis ex A C & C B, vel duobus quadratis ex H C; quare si addatur singulis, commune quadratum D C, erunt quadrata ex A C & C B vnà cum duobus quadratis D C simul æqualia quadratis ex F C & C G simul cum ipsis duobus quadratis D C, quibus etiam æqualia sunt duo quadrata ex H C vnà cum duobus quadratis DC. Sed quadratum ex FD æquale est quadratis ex F C & C D, & quadratum ex D G æquale est duobus quadratis G C & D C; duo igitur quadrata, scilicet F D & G D æqualia sunt duobus quadratis FC & GC vnà cum duobus quadratis D C; Quare etiam æqualia sunt duobus quadratis ex A D & D B simul, siue duobus quadratis ex H D.

Cùm igitur duo quadrata ex F D & D G simul sumpta æqualia sint duobus quadratis ex H D, quadratum autem F D maius sit quadrato D G; sequitur quod quantò quadratum F D superat quadratum H D, tantò quadratum H D superat quadratum G D; Idem demonstrabitur de quadratis rectarum A D & B D,

nec non de quibuslibet alijs rectis vtcunque ductis a vertice D ad terminos cuiuscunque diametri in base ipsius Coni Scaleni, & per totum ipsius superficiem; Quare quadratum rectæ HD erit medium Arithmeticum inter omnia quadrata rectarum a vertice D ad omnia puncta, vel ad quotlibet æquidistantia puncta numero paria sumpta in peripheriâ circuli qui basis est ipsius Coni Scaleni ADB.

Licet in figurâ punctum C, in quod cadit perpendicularis a vertice Coni Scaleni repræsentatur intra circulum qui basis est Coni, tota vero demonstratio est vniuersalis, & efficax, tam, ad demonstrandum quando idem punctum fuerit extra, quàm intra; Ex secundâ enim parte propositionis primæ dependet,

PROPOSITIO III.

Si fuerint quotcunque lineæ inæquales, numero impari; fuerint autem duo quadrata ex mediâ ipsarum æqualia duobus quadratis quæ ab extremis fiunt, nec non & quibuslibet alijs binis quadratis a rectis ordine a mediâ æqualiter distantibus. Dico quòd recta quæ dupla est mediæ maior sit lineâ compositâ ab extremis, vel a quibuscunque binis alijs æqualiter a medijs distantibus; & quòd

composita ex extremis minor sit quâcunque compositâ ex intermedijs.

Sint enim quinque lineæ inæquales A, B, C, D, E, quarum sit media C; Sit autem duplum quadrati C æquale quadratis extremarum A & E, nec non & duobus quadratis ex intermedijs B & D. Dico quòd recta æqualis duplæ C, maior sit quam linea composita ex extremis A & E. Componatur enim simul A & E, & fiat vna recta F G, quæ diuidatur ita in H vt sit F H æqualis A, H G verò æqualis E, & iterum bifariam secetur in puncto I.

A B C D E

F G K N M L

Et quoniam quadrata ex F H & H G simul sumpta æqualia sunt duobus quadratis ex F I vnà cum duobus quadratis ex I H, quadratum ex F I minus erit quadrato ex C, (duo enim quadrata ex linea C ponuntur æqualia duobus quadratis ex F H & H G.) Maior igitur est linea C quam F I dimidia aggregati ex A & E.

Rursus dico quòd linea composita ex intermedijs B & D maior sit quam composita ex extremis A & E; quòd autem minor sit quam dupla C ex iam dictis constat. Supponatur autem æqualis composita ex A

& E si fieri potest; Quoniam autem maior est differentia inter A & E, quam inter B & D, minor erit ratio B ad D, quam A ad E, ideoque in lineâ KL quæ æqualis ponatur rectæ FG, fiat KM ad ML, sicut B ad D, & bifariam secetur tota KL in N.

Et quoniam quadrata KM & ML simul sumpta æqualia sunt quadratis ex FH & HG; linea verò KL secta est bifariam in N & non bifariam in M, ideo duo quadrata KN vnà cum duobus quadratis ex NM simul, æqualia sunt duobus quadratis ex KM & ML vel FH & HG; Sed minor est ratio KM ad ML, quam FH ad HG, minor igitur est KM quam FH; KN vero æqualis FI, & ideo NM minor est quam IH; Quare duo quadrata ex KN vnà cum duobus quadratis NM minora sunt duobus quadratis FI cum duobus quadratis IH, hoc est duobus quadratis ex FH & HG. Non potest igitur linea KL quæ ponitur æqualis lineæ FG, vel aggregato extremarum A & E, esse æqualis aggregato ex B & D; neque minor esse potest. Oportet ergo quòd composita ex extremis A & E, minor sit quâcunque lineâ factâ ex aggregato quarumlibet intermediarum ordinatim sumptarum.

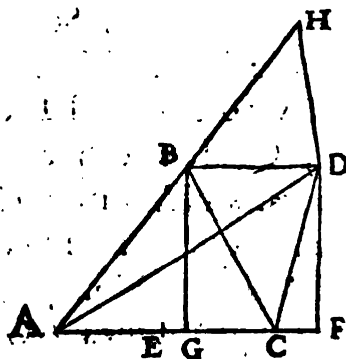
COROLLARIVM.

Hinc manifestum est quòd in diagrammate præcedentis propositionis, duplum lineæ HD (cuius quadratum est medium Arithmeticum inter omnia quadrata rectarum in superficie Coni Scaleni ADB du-

ctarum

ctarum a vertice ad basim) sic maius aggregato recta-rum FD & DG, & quòd aggregatum ex FD & DG etiam maius sit aggregato ex AD & DB; Vnde etiam constat, quòd aggregatum ex AD & DB, sit omnium aggregatorum quarumcunque rectarum, a terminis cuiuscunque diametri in base dicti Coni ductarum ad verticem D, minimum.

LEMMA.



Sint duo triangula ABC & ADC super eadem basi AC constituta, & sint eorum perpendiculares ad basim, scilicet BG & DF inter se æquales, punctum autem E sit in medio basis AC, & sit maior distantia puncti F in quod cadit perpendicularis a vertice D, ab E puncto, quam puncti G, in quod cadit perpendicularis a vertice B ab ipso E: Dico aggregatum ex AD & DC maius esse aggregato ex AB & BC.

Constituantur enim triangula ABC & ADC ita super basi communi AC, vt perpendiculares quæ a verticibus eorum, videlicet BG & DF, cadant ad easdem partes puncti E. Producatur iam AB, & in producta fiat BH æqualis BC, & connectantur rectis HD, & BD: Et quoniam in triangulo ABC, latus AB maius est latere BC, erit angulus BAC vel HBD (parallela enim est BD basi AC) minor angulo ACB

vel

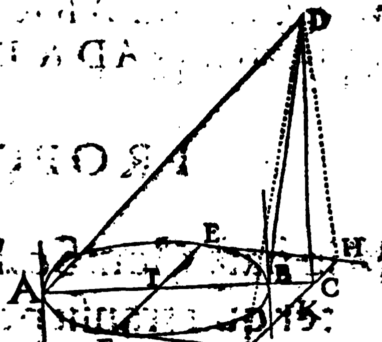
vel DBC; quare enim sint duo trianguli HBD & DBC quæ duo latera HB & BD duobus lateribus trianguli BDC scilicet BC & BD æqualia habeant, angulum vero DBC minorem angulo HBD, latus DC maius erit latere DH. Ideoque aggregatum ex AD & DH minus erit aggregato ex AD & DC; Sed aggregatum ex AD & DH maius est lineâ AH vel aggregato ex AB & BC, multò igitur maius erit aggregatum ex AD & DC, aggregato ex AB & BC.

PROPOSITIO IV.

Si in base Coni Scaleni ducta fuerit diameter quæ transit per punctum in quod cadit perpendicularis a vertice, ducta autem fuerit & alia diameter vtcunque, ad terminos vero vtriusque diametri applicatæ fuerint tangentes circulo: Et si ad singulas earum a vertice Coni ductæ fuerint perpendiculares. Dico quod aggregatum binarum perpẽdicularium quæ a vertice Coni Scaleni ducuntur ad terminos diametri, quæ transit per punctum in quod cadit perpendicularis, sit maius aggregato binarum perpendicularium quæ ad lineas tangentes basim.

Coni in terminis alterius diametri ducuntur.

SIt enim Conus Scalenus A D B cuius basis Circulus A E B F, vertex D, perpendicularis D C cadens in planum basis in puncto C, ad quod ducatur diameter basis recta A B C: Sit iterum alia diameter vtcunque E F, & ad singula puncta in peripheria basis A, B, E, & F, ducantur tangentes, ad quas a puncto C, ducantur perpendiculares C B, C A, C H, & C G, & a vertice D ducantur rectæ D A, D B, D H, & D G, quas dico esse singulis tangentibus quibus occurrunt perpendiculares. Quoniam enim linea D C est ad planum basis erecta, erit planum in quo triangulum D G C ad planum basis erectum: Sed linea F G est perpendicularis lineæ G C, ideoque, cùm sit in plano quod est ad planum trianguli erectũ, erit ad lineam etiam G D perpendicularis: Simili modo demonstrabitur quod reliquæ lineæ D H, D B & D A sint etiam perpendiculares singulis tangentibus circulum in punctis A, E, & B. Dico iam quod aggregatum duarum linearum A D & D B, quæ sunt perpendiculares lineis tangentibus circulum in punctis A & B maius esse aggregato ex binis D H & D G, quæ sunt perpendiculares lineis E H & F G tangentibus basim coni in punctis E & F.



18.11. Euclid.

Quo-

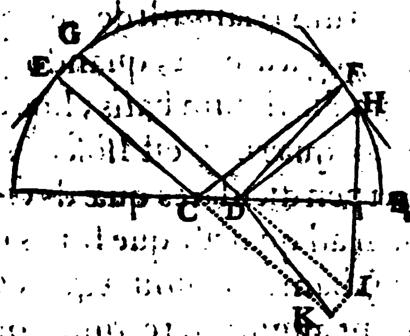
Quoniam enim sunt duo triangula ADB & GDH, in eadem altitudine consistentia, & super basibus æqualibus, est enim GH æqualis FE, FE vero æqualis AB, quapropter basis GH æqualis est basi AB: Punctum autem C in quod perpendiculum cadit, magis distat a puncto I in medio basis trianguli ADB, quàm distat idem punctum C a puncto K, quod medium est basis trianguli GDH; latera igitur AD, DB trianguli ADB simul sumpta, maiora sunt lateribus GD, DH, trianguli GDH simul sumptis. Per Lemma præcedens.

COROLLARIVM.

Hinc manifestum est quod, quò propius accedat punctum in quod cadit perpendicularis a vertice ad medium basis, eò minus esse aggregatum binorum laterum trianguli de quo quæritur, & quòd minimum aggregatum est, quando perpendiculum cadit in ipsum dimidium basis, hoc est, quando triangulum de quo quæritur est Isosceles. Ideoque minimæ binæ perpendiculares quæ duci possunt a vertice Coni Scaleni ad quascunque binas tangentes in terminis alicuius diametri, sunt æquales duabus rectis, quæ subtendunt angulum rectum comprehensum a duabus rectis, quarum vna æqualis est altitudini Coni, reliqua vero semidiametro basis eius. Maximum igitur aggregatum ex binis perpendicularibus a vertice Coni D ductis ad quascunque binas tangentes ad basim, est ex AD & DB. Minimum autem est æquale duobus lateribus Coni recti super eadem basi AEBF & in eadem altitudine DC constituti.

PROPOSITIO V.

Si in peripheriâ Semicirculi sumantur duo puncta ab vtroque basis termino æquidistantia, & ad vtrumque illorum ducantur rectæ tangentes Semicirculum, & si ab aliquo alio puncto in diametro, ipsis tangentibus ductæ fuerint perpendiculares. Dico aggregatum ex perpendicularibus illis æquale esse diametro Semicirculi.



Sit Semicirculus AEFB cuius centrum C, & in diametro AB sumatur vtcunque punctum D. In peripheriâ A autem sęcirculi sumptis punctis E, & F, ab A, & B æquidistantibus, ductæ sint ipsis rectæ EG, FH tangentes semicirculum, & a puncto D, ipsis tangentibus perpendiculares DG & DH. Dico rectas DG & DH simul sumptas, æquales esse diametro AB. A centro enim ducantur rectæ CE & CF, quæ etiam perpendiculares erunt tangentibus, ideoque parallelæ lineis GD & DH; ab H verò ducatur HI ad angulos rectos diametro

AB si opus producta, & producta GD concurrat ipsi in puncto I; producatur etiam EC & fiat CK ei æqualis, & a K ducatur KI.

Et quoniam anguli ad centrum ECA, FCB sunt æquales, ob æquales peripherias quibus insistunt, erunt etiam anguli GDA & BDH æquales ipsis, & ad inuicem; angulus vero BDI est æqualis angulo GDA, ideoque etiam angulo HDB, sed DB est perpendicularis HI, ideoque DI æqualis DH, & tota GI aggregato ex GD & DH. A puncto iam D ducantur rectæ DF & DK, quæ quoniam punctum K est etiam in circulo, & peripheria BK æqualis peripheriæ BF, erit DF æqualis DK; & igitur in triangulis FDH, & KDI, erunt latera FD, DH æqualia lateribus KD, DI, & angulus FDH æqualis angulo KDI, ideoque angulus DIK æqualis angulo DHF, & propterea rectus. Quare EGIK est parallelogrammum, & latus GI æquale lateri EK, vel diametro AB. Aggregatum igitur ex GD & DH hoc est ex perpendicularibus a puncto D ad tangentes ductis æquale est diametro AB quod probandum erat.

COROLLARIVM. I.

Hinc manifestum est, quòd si sumpta fuerint quotcunque puncta æquidistantia in peripheria circuli, & per singula eorum ductæ tangentes circulo, & ad singulas tangentes, a centro C, & puncto D, ductæ perpendiculares, quòd omnes perpendiculares a puncto

D ad tangentes simul sumptæ, æquales sint omnibus perpendicularibus a centro ad easdem tangentes ductis: Quare, per definitionem medij Arithmetici, semidiameter A C est media Arithmetica inter omnes perpendiculares a puncto D ad ipsas tangentes ductas.

II. Apparet etiam quòd eadem recta quæ media est Arithmetica inter extremas perpendiculares, sit etiam media Arithmetica inter omnes earum: Nam Semidiameter A C est media Arithmetica inter A D & DB, & inter omnes.

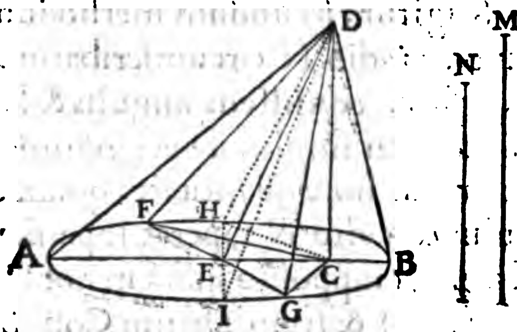
PROPOSITIO VI.

Superficies Conica Coni Scaleni æqualis est Circulo, cuius Radius est medius proportionalis inter radium Basis Coni Scaleni & lineam quæ media est in ratione Arithmetica inter omnes Perpendiculares, quæ a vertice ipsius Coni ad omnes tangētes in punctis circuli ducūtur.

Esto igitur Conus Scalenus A D B, cuius basis Radius A E, & sit linea M media Arithmetica inter omnes perpendiculares a vertice D ad omnes

.I lineas tangentes basim A H B I: Sit autem inter M & A E media proportionalis N. Dico circulum ex radio N æqualem esse superficiei conicæ Coni A D B. Quod autem ita se habet, probo. Concipiantur ex

radiis M & N facti circuli, & circa illos & basim Coni circumscriptæ similes figuræ polygoniæ ex æqualibus lateribus & angulis, & ab vnoquoque angulorum ad centrum ductæ rectæ: a figurâ verò circumscribente basim Coni ad verticem D ducantur plana per verticem & singula figuræ latera, ex quibus facta erit Pyramis circumscribens Conum. Triangula igitur quæ fiunt ex ductu rectarum ad centra in figuris circumscribẽtibus circulos sunt omnes similes, ideoque in ratione ad inuicem sicut circuli ipsi, vel sicut rectangula quæ fiunt ex basibus & altitudinibus ipsorum.



Triangula vero quæ sunt latera Pyramidis circumscribentis Conum, quæ etiam sunt numero paria reliquis quæ in circulis fiunt, habent easdem bases quas habent triangula figuræ circumscribentis basim Coni, altitudines vero æquales perpendicularibus quæ a vertice D Coni, ad bases ducuntur; quare triangulum cuius perpendiculum est medium Arithmeticum inter omnia perpendicula, est medium Arithmeticum inter omnia triangula in superficie Pyramidis quæ circumscribit Conum. Sed Radius M est medius Arithmeticus inter omnes perpendiculares ductas a vertice D ad bases triangulorum, quæ sunt tangentes ad basim Coni; Igitur omnia Triangula in superficie Pyramidis (hoc est Superficies Pyramidis) se habent ad omnia trian-

gula

gula basis; (hoc est ad figuram Polygoniam, quæ basis est ipsius) sicut linea M ad rectam A E, quæ radius est basis Coni. Sicut autem se habet linea M ad A E radium basis Coni, ita se habet figura Polygonia circumscripta circulo cuius radius N, ad figuram circumscriptam basi Coni. Quare figura polygonia circumscripta Circulo ex radio N, æqualis est superficiei Pyramidis circumscribentis Conum Scalenum ADB.

Si igitur, secundum methodum Archimedis, Circulo ex radio N circumscribatur Figura polygonia ex æqualibus consistens angulis & lateribus, & ei altera inscribatur similis, ita vt circumscripta excedat inscriptam, minore quantitate, quam est excessus quo Circulus ex radio N superat superficiem Conicam Coni scaleni, (supposito quòd maior sit Circulus conicâ superficie;) & si circa basim Coni similis circumscribatur figura, pro basi Pyramidis circumscribentis Conum; ostendetur quod circulus ex radio N non possit esse maior Conicâ superficie. Et simili prorsus methodo demonstrabitur quòd neque minor esse potest. Quare necessarium est vt sint æquales.

Methodum autem demonstrationis quoniam admodum longam, & omnibus satis notam, meliùs mihi visum est non apponere, sed magis vt apud authorem Archimedem libro primo de Sphærâ & Cylindro quæratur.

Media autem Arithmetica, inter omnes Perpendiculares a vertice Coni A D B ad omnes tangentes basis ipsius, sic quæratur. Quoniam enim Media inter A D & D B, non est media quæsita, propterea

quod

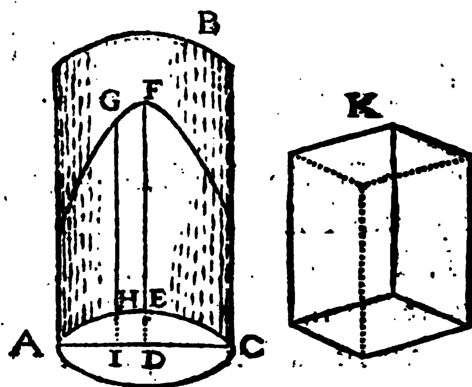
quòd talis Conus constitui possit, vt linea DB foret maior quam media Arithmetica inter omnes perpendiculares ad tangentes basis, (quod intuenti facile apparebit) multò minùs potest media inter AD & DB esse media quæsita. Oportet igitur vt quæratur media Arithmetica inter aggregatum ex AD & DB & duplum lateris Coni recti super eadem basi & in eadem altitudine constituti. Maximum enim aggregatum omnium binarum perpendicularium est ex AD & DB; Minimum vero est duplum lateris Coni recti, ex eâdem basi & altitudine sicut antea demonstratum est. Dimidium igitur illius medij Arithmetici inter aggregatum ex AD & DB, & duplum lateris Coni recti, est Medium Arithmeticum quæsitum; quod infinitis exemplis in numeris cõprobabitur. Supponatur enim quòd AD & DB sint sicut 6. & 4. & quòd minimæ perpendicularium, scilicet latera Coni recti sint 3 & 3. aggregatum igitur omnium est 16, quod diuisum per numerum terminorum 4. facit 4. pro Medio Arithmetico inter omnes numeros. Hanc inuentionem Medij Arithmetici veram esse iudico, etiamsi Geometricè demonstratam non affirmo; donec autem improbetur, & falsam esse demonstretur semper veram esse existimabo.

CVBATIO CVIVSDAM PARTIS CYLINDRI RECTI, Dissectæ Plano per Centrum Basis transeunte.

DE Geometrica Cubatione Sphæræ vel Cylindri, Nemo quòd sciam hactenus scripsit. De quadratura Circuli verò multi, etiam inter veteres, & vt ita dicam in ipsa Geometriæ infantia; quorum antiquissimus erat Hippocrates Chius, qui vixit circa annum quingentesimum ante Christum natum; post illum Antiphon & Bryso, de quibus Aristoteles meminit, & falsa Hippocratis quadratura sæpe ab illo in exemplum Parallogismi adducitur. Hic verò licet non quadrauerit rectè Circulum, quadrauit tamen Lunulam, & post illum vsque ad Vietam non extitit alius, qui vel aliquam aliam Circuli partem quadrauerit. Vieta tamen quadrauit plures Lunulas & Arbelum. Interim excogitata fuit a Dinostrato & Nicomede vt refert Pappus linea quadratrix, cuius ope datur recta æqualis circumferentiæ Circuli, a Geometris tamen reiecta, propterea quòd in base non detur ipsum punctum: veruntamen, hoc concesso, facilè demonstrabitur Cuiusuis Solidi rotundi Cubatio. Tandem mihi accidit quærenti cubationem Cylindri, Inuenire

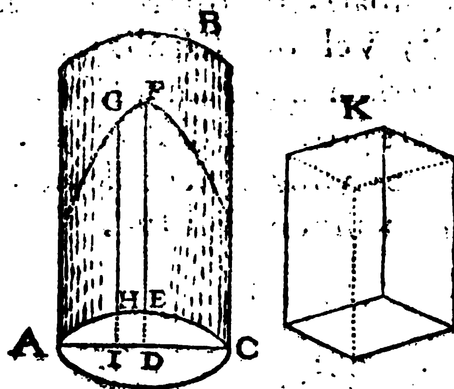
partem

partem eiusdem, dissectam plano per punctum aliquod in superficie & centrum basis, æquari cuidam Prismati, cuius Basis sit subsesquialtera triangulo maximo, quod fit per sectionem eiusdem Portionis, plano ad planum secans recto, altitudo vero æqualis diametro basis Cylindri. Inueni etiam quòd dissectâ iterum, ex alia parte Cylindri, portione simili, partem intermediam (quam Cuneum Cylindricum nomino) non posse cubari, sine ope rectæ æqualis circumferentiæ circuli; Vel, quòd, si aliâ ratione cubari potuerit, daretur etiam quadratura Circuli, quod Problematicè efficere pro impossibili habeo: Theorematicè vero Cubatio Cylindri, sicut illa Archimedis quadratura Circuli facillimè efficietur.



Sit igitur Cylindrus rectus AB, cuius Basis Circulus circa centrum D, a quo in basi ducatur ad peripheriam recta DE; a puncto verò E in superficie Cylindri ducatur recta, in quâ sumpto quocunque puncto F. per illud & D centrum basis, transeat Planum dissecans partem Cylindri AFCD, cuius basis AEC est se-

micirculus, Planum AFC ex sectione factum Semiellipsis, reliqua verò Superficies est ipsius Cylindri. Concipiatur iam ista Portio sic dissecta, iterum secari plano per punctum D, ad plana AFC & AEC recto, faciente triangulum FED; & fiat Prisma K super basi subsesquialterâ trianguli FED, in altitudine verò æquali diametro AC. Dico Portionem istam AFCD, æquari Prismati K.



Secetur iterum Portio AFCD vtcunque alio Plano, parallelo Plano FED, faciente sectionem Triangulum GHI. Et quoniam Cylindrus AB est rectus erunt omnes rectæ in superficie Cylindri ad basim eius erectæ, quare linea FE est perpendicularis ED, & GH, HI: Iterum cùm sint duo plana FED, & GHI, parallela, ac etiam duo alia plana AFC, & AEC, quæ illa secant, communes eorum sectiones, scilicet rectæ FD & GI, DE & IH, erunt inuicem parallelæ, ideoque continebunt inuicẽ angulos æquales. Quare triangula FED, & GHI, erunt similia, & sic per totum spacium Solidi AFCD, omnia trian-

gula

gula facta ex sectionibus per plana parallela sectioni FED, erunt ad inuicem similia. Cum autem triangula similia se habeant ad inuicem sicut quadrata laterum homologorum, erit triangulum GHI ad triangulum FED, sicut quadratum HI ad quadratum ED, & sic erit quoduis aliud triangulum ex sectione parallelâ factum ad triangulum FED, & sumptis omnibus antecedentibus ad omnes consequentes, erunt omnia triangula in Solido AFC, hoc est, ipsum Solidum AFC ad totidem triangula FED, hoc est ad Prisma ex basi triangulo FED & altitudine AC, sicut omnia quadrata rectarum in Semicirculo AEC ad diametrum AC applicatarum, ad totidem quadrata semidiametri ED. Sed sicut omnia ista quadrata ad totidem quadrata ED, ita omnes Circuli facti ex rectis illis pro radijs; ad totidem Circulos ex semidiametro ED: hoc est sicut Sphæra ex radio ED ad Cylindrum ex eodem radio ED pro basi & altitudine AC: Vel sicut Sphæra ad Cylindrum eam circumscribentem, id est, in ratione subsesquialterâ. Quare Solidum AFC est ad Prisma ex basi triangulo FED & altitudine rectæ AC in eadem ratione, scilicet subsesquialterâ. Prisma autem K constituta est super basi subsesquialterâ trianguli FED, & in altitudine eiusdem rectæ AC; Quare in ratione subsesquialterâ se habet Prisma K ad tale Prisma super basi triangulo FED & eiusdem altitudinis AC; Ideoque Prisma K & Pars Cylindri dissecta notata literis AFCD sunt æqualia, quod erat propositum.

Quod assumptum est, scilicet, quòd ratio omnium

qua-

quadratorum rectarum in circulo ordinatim applicatarum, ad totidem quadrata semidiametri, sit sicut Sphæra ad Cylindrum eam circumscribentem deducitur ex Cavalleriana doctrina Geometriæ indiuisibilium, & demonstrari potest ex prima propositione libri tertij eiusdem. Satis etiam manifestum est ex eo quod circulus qui basis est Cylindri æqualis & eiusdem altitudinis cum sphæra, sit subsesquialter circuli qui basis est Cylindri circumscribentis Sphæram; oportet autem quod circulus qui basis est Cylindri æqualis sphæræ, sit medius Arithmeticus inter omnes circulos in Sphæra ipsi parallelos, quoniã omnes circuli in sphæra æquales sunt omnibus circulis in Cylindro ei æquali. Ideoque omnes circuli ipsius ad omnes circulos Cylindri circumscribentis eam, sicut basis ad basim, sunt enim in eadem altitudine. Quare &c.

FINIS.

Errata sic corrigito,

Pag.	linea.	
37	21	sicut RB ad FB: *lege*, sicut FB ad KB,
46	6	DE ad LM. *lege* DE ad LE.
74		In figurâ desunt literæ F, & R, denotantes Truncum Coni IFRN.
96		Desunt literæ L & M in figurâ designantes planum parallelum basi.
113		Fit error figuræ: ponenda est hic figura prior paginæ 116
135		Deest in figura litera N, & linea a puncto H, includens rectangulum HN.
148	23	*lege* inscribi potest propriè Sphæroides.
168	13	æquali *lege* æquale; & in figurâ desunt literæ R & S. R ponenda inter A & E; S, verò loco G, & G notans Hemisphærium EFG: deest etiam Q, inter N & L.
257	23	daleatur, in
263	16	*lege* sicut LH ad FG.
274	26	ducta. *lege* ductarum.
284	15	secirculi. *lege* semicirculi.

